PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JULIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ y el vector $\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 3\end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1}.

b) Determina el vector $\vec{x}$ que verifica que $A \cdot \vec{x} = B^t \cdot \vec{c}$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B.

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} = 2+3-4 = \underline{1}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -5 & -2 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 + 2F_2 \\ F_3 \to F_3 - 4F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 + F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

Sea el vector pedido $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$A \cdot \vec{x} = B^t \cdot \vec{c} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x - 2y + z \\ 2x - 3z \\ y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 1 + 6 \\ 4 - 2 - 3 \\ -2 + 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3z = -1 \\ y - z = 7 \end{matrix}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & -5 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 4F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -39 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 39; \;\; y - z = 7; \;\; y - 39 = 7; \;\; y = 46;$$

$x - 2y + z = 5; \;\; x - 92 + 39 = 5; \;\; x = 5 + 92 - 39 = 58.$

$$\underline{\vec{x} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) Los ingresos y costes anuales, en miles de euros, de una fábrica de mochilas vienen dados, respectivamente, por las funciones $I(x) = 4x - 9, C(x) = 0{,}01x^2 + 3x$, donde la variable x expresa en euros el precio de venta de una mochila. Se pide:

a) Calcula la función de beneficios.

b) ¿Cuál ha de ser el precio de venta x para que el beneficio sea máximo?

c) Para la función de beneficios, determina los puntos de corte con los ejes y las zonas de crecimiento y decrecimiento. Representa gráficamente dicha función.

d) Razona para qué precios de venta (valores de x) la empresa tendría pérdidas.

----

a)

$$B(x) = I(x) - C(x) = (4x - 9) - (0{,}01x^2 + 3x) = 4x - 9 - 0{,}01x^2 - 3x.$$

$$\underline{B(x) = -0{,}01x^2 + x - 9}.$$

b)

Las condiciones necesarias para que una función tenga un máximo relativo es que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$B'(x) = -0{,}02x + 1. \qquad B''(x) = -0{,}02 < 0 \Rightarrow Máximo.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}02x + 1 = 0;\ \ 2x = 100 \Rightarrow x = 50.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ cuando\ el\ precio\ de\ una\ mochila\ es\ de\ 50\ euros}.$$

c)

$$Corte\ eje\ X: y = B(x) = 0 \Rightarrow -0{,}01x^2 + x - 9 = 0;\ x^2 - 100x + 900 = 0;$$

$$x = \frac{100 \pm \sqrt{10.000 - 3.600}}{2} = \frac{100 \pm \sqrt{6.400}}{2} = \frac{100 \pm 80}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10 \to \underline{A(10, 0)} \\ x_2 = 90 \to \underline{B(90, 0)} \end{cases}.$$

$$Corte\ eje\ Y: x = 0 \Rightarrow y = -9 \Rightarrow \underline{C(0, -9)}.$$

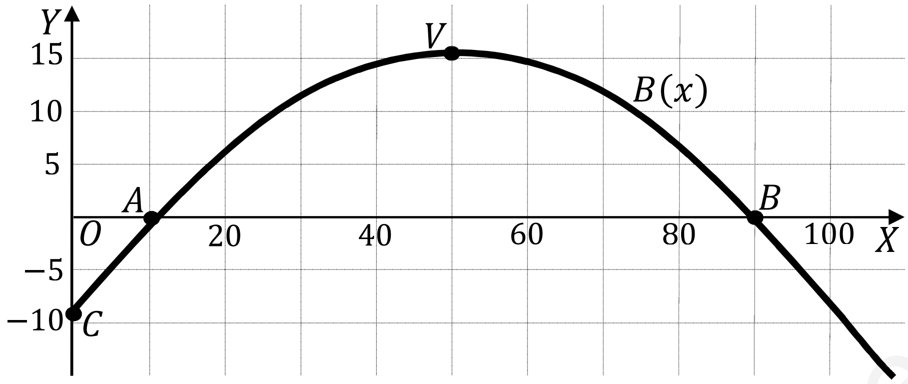
$$B(50) = -0{,}01 \cdot 50^2 + 50 - 9 = -25 + 41 = 16.$$

Teniendo en cuenta que la función beneficios es una parábola cóncava ($\cap$) cuyo máximo es el punto $V(50, 16)$ y que $x \geq 0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: B'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0{,}50)}.$$

$\underline{Decrecimiento: B'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (50, +\infty).}$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



$d)$

De la observación de la gráfica de la función beneficios se deduce que:

$\underline{Hay\ pérdidas\ cuando\ el\ precio\ de\ las\ mochilas\ es\ 10 < x < 90\ euros.}$

****

3º) Un dado normal tiene sus caras numeradas del 1 al 6. Otro dado está trucado y tiene cuatro caras numeradas con el 5 y las otras dos caras numeradas con el 6. Se elige un dado al azar y se realizan dos tiradas con el dado elegido. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de sacar un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda.

b) Calcula la probabilidad de que la suma de los resultados obtenidos entre las dos tiradas sea 11.

c) Si al realizar las dos tiradas con el dado elegido al azar se obtiene un 6 en la primera tirada y un 5 en la segunda, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado?

Dado normal N; dado trucado T.

a)

$$P=\frac{1}{2}\cdot[P(N)+P(T)]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\right]=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{36}+\frac{8}{36}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{36}=\underline{\frac{1}{8}=0{,}125}.$$

b)

$$P=\frac{1}{2}\cdot[P(N)+P(T)]=\frac{1}{2}\cdot\left[\overbrace{P(56)+P(65)}^{Normal}+\overbrace{P(56)+P(65)}^{Trucado}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\overbrace{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}^{Normal}+\overbrace{\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}}^{Trucado}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{8}{36}\cdot\frac{8}{36}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{36}+\frac{16}{36}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{18}{36}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\frac{1}{4}=0{,}25}.$$

c)

$$P=\frac{P(T\to 65)}{P(N\to 65)+P(T\to 65)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)}{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}\right)}=\frac{2\cdot 4}{1\cdot 1+2\cdot 4}=\frac{8}{1+8}=\underline{\frac{8}{9}=0{,}8889}.$$

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Un inversor decidió invertir un total de 42.000 euros entre tres productos:

1-- Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5 %.

2-- Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7 %.

3-- Unos bonos con unos intereses anuales del 9 %.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2.600 euros. Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 euros menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

Sean x, y, z las inversiones que se realiza el inversor en la cuenta de ahorros, el depósito a plazo fijo y en los bonos, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=42.000 \\ 0{,}05x+0{,}07y+0{,}09z=2.600 \\ 0{,}05x+200=0{,}07y+0{,}09z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=42.000 \\ 5x+7y+9z=260.000 \\ 5x+20.000=7y+9z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=42.000 \\ 5x+7y+9z=260.000 \\ 5x-7y-9z=-20.000 \end{array}\right\}$$. Sumando miembro a miembro las dos últimas ecuaciones:

$$10x=260.000-20.000=240.000 \Rightarrow x=24.000.$$

$$\left.\begin{array}{r} 24.000+y+z=42.000 \\ 5\cdot 24.000+7y+9z=260.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y+z=42.000-24.000 \\ 7y+9z=260.000-120.000 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} y+z=18.000 \\ 7y+9z=140.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -7y-7z=-126.000 \\ 7y+9z=140.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 2z=14.000; \;\; z=7.000.$$

$$x+y+z=42.000; \;\; 24.000+y+7.000=42.000; \;\; y=42.000-31.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=11.000.$$

$$\underline{\mathit{Invirtió}\ 24.000,11.000\ y\ 7.000\ \mathit{euros\ en\ los\ tres\ productos, respectivamente}.}$$

****

2º) Una explotación minera extrae $f(t) = 30 + \frac{3}{2}t - \frac{1}{800}t^3$ toneladas de carbón por año, donde la variable t indica el tiempo transcurrido, en años, desde el inicio de la explotación. Se pide:

a) Calcula en qué año se alcanza el máximo de extracción y cuál es dicho valor.

b) Si se necesita extraer como mínimo 10 toneladas por año para que la explotación sea rentable, estudia si el año $t = 40$ es rentable.

c) ¿Existe algún periodo de tiempo, a partir de los 40 años, en el que la explotación es rentable? Razona tu respuesta.

----

a)

Para que una función tenga un máximo relativo son condiciones necesarias que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(t) = \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{800}t^2.$ $\qquad f''(t) = -6 \cdot \frac{1}{800}t = -\frac{3t}{400}.$

$f'(t) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{800}t^2 = 0;\ \frac{3}{2} = 3 \cdot \frac{1}{800}t^2;\ t^2 = 400 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -20 \\ t_2 = 20 \end{cases}.$

Como el tiempo no puede ser negativo, la solución es $t = 20$.

$f''(20) = -\frac{3 \cdot 20}{400} < 0 \Rightarrow$ Justificación de que se trata de un máximo relativo.

$\underline{A\ los\ 20\ años\ se\ alcanza\ la\ máxima\ extracción\ de\ carbón}.$

$f(20) = 30 + \frac{3}{2} \cdot 20 - \frac{1}{800} \cdot 20^3 = 30 + 30 - 10 = 50.$

$\underline{La\ máxima\ extracción\ es\ de\ 50\ toneladas\ de\ carbón}.$

b)

$f(40) = 30 + \frac{3}{2} \cdot 40 - \frac{1}{800} \cdot 40^3 = 30 + 60 - 80 = 10.$

$\underline{A\ los\ 40\ años\ la\ mina\ es\ mínimamente\ rentable}.$

c)

Del apartado a) se deduce que a partir de los 20 años la producción decrece monótonamente, por tratarse de una función polinómica que tiene un mínimo para el valor negativo de $t = -20$; del apartado b) concluimos que a partir de los 40 años la producción no es rentable, por todo lo cual:

$\underline{No\ existe\ ningún\ periodo\ rentable\ a\ partir\ de\ los\ 40\ años.}$

****

3º) El espacio muestral asociado a un experimento aleatorio $\Omega = \{a, b, c, d, e\}$. Se sabe que $P(a) = P(c) = \frac{1}{8}, P(d) = \frac{1}{4}, P(e) = \frac{1}{3}$. Dados los sucesos $A = \{a, b, c\}\ y\ B = \{b, d, e\}$ y siendo $\overline{A}$ el suceso contrario o complementario de A y $\overline{B}$ el suceso contrario o complementario de B, calcula:

$a)$ $P(A \cap B)$. $b)$ $P\left(A \cup \overline{B}\right)$. $c)$ $P\left(\overline{A} \cap \overline{b}\right)$. $d)$ $P\left(A/\overline{B}\right)$. $e)$ $P(B/A)$.

$$P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) = 1;\ \frac{1}{8} + P(b) + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$P(b) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = 1;\ \ 12 \cdot P(b) + 3 + 3 + 4 = 12;\ \ P(b) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

$a)$

$$A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, d, e\} = \{b\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(b) = \underline{\frac{1}{6}}.$$

$b)$

$$A \cup \overline{B} = \{a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, b, c\} \Rightarrow P\left(A \cup \overline{B}\right) = P(a) + P(b) + P(c) =$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{4+6}{24} = \frac{10}{24} = \underline{\frac{5}{12}}.$$

$c)$

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{d, e\} \cap \{a, c\} = \emptyset \Rightarrow P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \underline{0}.$$

$d)$

$$P\left(A/\overline{B}\right) = \frac{P(A \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} \Rightarrow \left[\begin{matrix} A \cap \overline{B} = \{a, b, c\} \cap \{a, c\} = \{a, c\} \\ \overline{B} = \{a, c\} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{P(a)+P(c)}{P(a)+P(c)} = \underline{1}.$$

$e)$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow \left[\begin{matrix} A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, d, e\} = \{b\} \\ A = \{a, b, c\} \end{matrix}\right] \Rightarrow \frac{P(b)}{P(a)+P(b)+P(c)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4+6}{24}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{10}{24}} = \frac{1}{\frac{10}{4}} = \frac{4}{10} = \underline{\frac{2}{5}}.$$

****