PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una pastelería vende dos clases de cajas de bombones. En las cajas denominadas extra incluye 15 bombones de tipo A y 30 de tipo B, mientras que en las cajas denominadas deluxe contienen 30 bombones de tipo A y 15 de tipo B. Con cada bombón de tipo A obtiene un beneficio de 50 céntimos, y con cada uno de tipo B un beneficio de 40 céntimos. Denominando x al número de cajas extra, e y al número de cajas deluxe que vende, se pide:

a) Calcula la función de beneficios de la pastelería.

b) Si dispone de 450 bombones de cada tipo, calcula el número de cajas x e y que deberá vender de cada clase para obtener un beneficio máximo. Calcula dicho beneficio máximo.

----

a)

$$f(x,y) = 0{,}5 \cdot (15x + 30y) + 0{,}4 \cdot (30x + 15y) = 7{,}5x + 15y + 12x + 6y.$$

$$\underline{f(x,y) = 19{,}5x + 21y}.$$

b)

Las restricciones son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 15x + 30y \leq 480 \\ 30x + 15y \leq 480 \\ x \geq 0;\ y \geq 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y \leq 30 \\ 2x + y \leq 30 \\ x \geq 0;\ y \geq 10 \end{array}\right\}.$$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

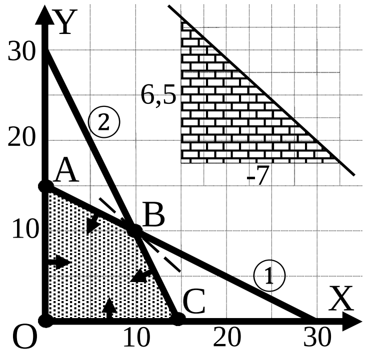
① $\Rightarrow x + 2y \leq 30 \Rightarrow y \leq \frac{30-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	30
y	15	0

② $\Rightarrow 2x + y \leq 30 \Rightarrow y \leq 30 - 2x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	15
y	30	0

Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ x + 2y = 30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A(0,15).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x + 2y = 30 \\ 2x + y = 30 \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} -x - 2y = -30 \\ 4x + 2y = 60 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 30;$$

$x = 10;\ \ y = 10 \Rightarrow B(10,10).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} y = 0 \\ 2x + y = 30 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 15 \Rightarrow C(15,0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0,15) = 19{,}5 \cdot 0 + 21 \cdot 15 = 0 + 315 = 315.$$

$$B \Rightarrow f(10,10) = 19{,}5 \cdot 10 + 21 \cdot 10 = 195 + 210 = 405.$$

$$C \Rightarrow f(15,0) = 19{,}5 \cdot 15 + 21 \cdot 0 = 292{,}5 + 0 = 292{,}5.$$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 19{,}5x + 21y = 0 \Rightarrow y = -\frac{19{,}5}{21}x = -\frac{195}{210}x = -\frac{6{,}5}{7}x \Rightarrow m = -\frac{6{,}5}{7}.$$

$$\underline{El\ máximo\ benefico\ se\ produce\ vendiendo\ 10\ cajas\ de\ cada\ tipo.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 405\ euros.}$$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función.

----

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$(x-2)^2 = 0;\ \ x-2=0 \Rightarrow x=2.$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2\}}.$$

Corte con el eje Y: $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{A\left(0, -\frac{1}{4}\right)}$.

Cortes con el eje X: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x-1}{(x-2)^2} = 0;\ \ x-1=0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{B(1,0)}$.

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$y = k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{(x-2)^2} = 0.$

$$\underline{El\ eje\ de\ abscisas\ es\ asíntota\ horizontal\ de\ la\ función.}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacer que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{La\ recta\ x=2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x-2)^2 - (x-1) \cdot [2 \cdot (x-2) \cdot 1]}{(x-2)^4} = \frac{(x-2) - 2 \cdot (x-1)}{(x-2)^3} = \frac{x-2-2x+2}{(x-2)^3} = \frac{-x}{(x-2)^3}.$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0,2).}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 0) \cup (2, +\infty).}$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x}{(x-2)^3} = 0;\ \ -x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

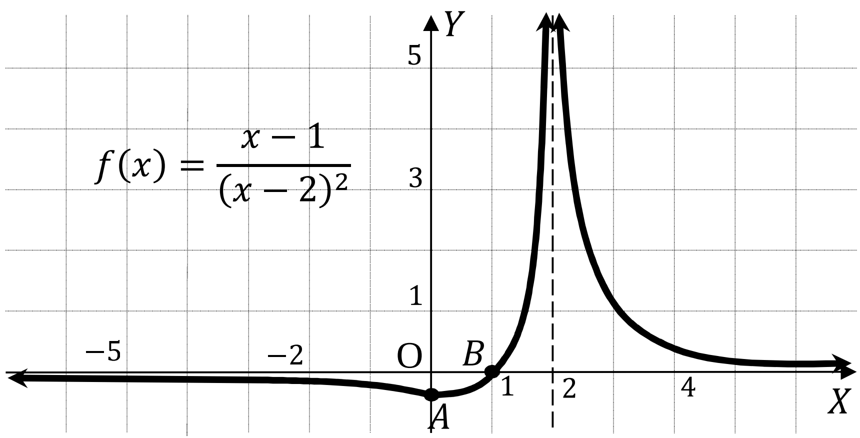
$$f''(x) = \frac{-1 \cdot (x-2)^3 + x \cdot [3 \cdot (x-2)^2 \cdot 1]}{(x-2)^6} = \frac{-1 \cdot (x-2) + 3x}{(x-2)^4} = \frac{-x+2+3x}{(x-2)^4} = \frac{2x+2}{(x-2)^4}.$$

$$f''(0) = \frac{2}{16} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0, -\frac{1}{4}\right)}.$$

$e)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

3º) En un estudio realizado en un comercio se ha determinado que el 68 % de las compras se pagan con tarjeta de crédito. El 15 % de las compras superan los 500 euros y ambas circunstancias (una compra supera los 500 euros y se paga con tarjeta de crédito) se da el 5 % de las veces. Calcula la probabilidad de que:

a) Una compra no supere los 500 euros y se pague con tarjeta.

b) Una compra no pase de 500 euros si no se ha pagado con tarjeta de crédito.

c) Una compra se pague con tarjeta de crédito si no ha superado los 500 euros.

$Datos$:

$Probabilidad\ de\ paar\ con\ tarjeta$: $P(T) = 0{,}68$.

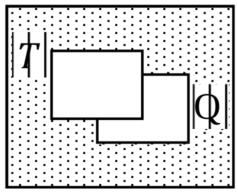
$Probabilidad\ desuperar\ 500\ euros$: $P(Q) = 0{,}15$.

$Probabilidad\ de\ paar\ con\ tarjeta\ y\ más\ de\ 500\ euros$: $P(T \cap Q) = 0{,}05$.

a)

$P = P(\overline{T} \cap \overline{Q}) = 1 - P(T \cup Q)$.   (*)

$P(T \cup Q) = P(T) + P(Q) - P(T \cap Q) =$



$= 0{,}68 + 0{,}15 - 0{,}05 = 0{,}83 - 0{,}05 = 0{,}78$.

Sustituyendo en (*) el valor obtenido:

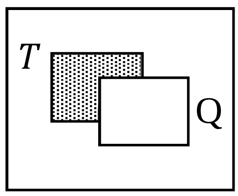
$P = P(\overline{T} \cap \overline{Q}) = 1 - P(T \cup Q) = 1 - 0{,}78 = \underline{0{,}22}$.

b)

$P(\overline{Q}/\overline{T}) = \frac{P(\overline{T} \cap \overline{Q})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}22}{1-0{,}68} = \frac{0{,}22}{0{,}32} = \frac{22}{32} = \underline{\frac{11}{16} = 0{,}6875}$.

c)

$P(T/\overline{Q}) = \frac{P(T \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})}$.   (**)



$P(T \cap \overline{Q}) = P(T) - P(T \cap Q) = 0{,}68 - 0{,}05 = 0{,}63$.

Sustituyendo el valor hallado en la expresión (**):

$P(T/\overline{Q}) = \frac{P(T \cap \overline{Q})}{P(\overline{Q})} = \frac{P(T) - P(T \cap Q)}{1 - P(Q)} = \frac{0{,}63}{1-0{,}15} = \frac{0{,}63}{0{,}85} = \underline{\frac{63}{85} = 0{,}7412}$.

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $y\ C=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular A^{-1}.

$b)$ Calcula una matriz X, de orden 3×3, que cumpla $A \cdot X = C$.

$a)$

La inversa de A se obtiene por la adjunta de la traspuesta: $A^{-1}=\frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|}$.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}=6+15+10-25+4+9=19.$$

$$A^t=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$Adj. de\ A^t=\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}.}$$

$b)$

$A \cdot X = C;\ \ A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot C;\ \ I \cdot X = A^{-1} \cdot C \Rightarrow \underline{X = A^{-1} \cdot C}.$

$$X=A^{-1} \cdot C=\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{19} \cdot \begin{pmatrix} 19 & 0 & 19 \\ 0 & 19 & 19 \\ 19 & 19 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) La caída de un meteorito en la Antártida provocó el deshielo de una superficie con una extensión en km^2 que viene dada por la función $f(t) = \frac{10t+21}{t+3}$, siendo t el número de días transcurridos desde el impacto.

a) ¿Cuál fue la superficie deshelada después de 6 días del impacto? ¿Y después de 87 días?

b) Estudia si la superficie deshelada crece o decrece a lo largo del tiempo.

c) Otro científico afirmó que la superficie deshelada venía dada por la siguiente función: $g(t) = 10 - \frac{9}{t+3}$. Comprueba si hay o no diferencias entre las dos funciones $f(t)$ y $g(t)$.

d) ¿Tiene algún límite la extensión del deshielo?

----

a)

$$f(6) = \frac{10 \cdot 6+21}{6+3} = \frac{60+21}{9} = \frac{81}{9} = 9.$$

$$f(87) = \frac{10 \cdot 87+21}{87+3} = \frac{870+21}{90} = \frac{891}{90} = \frac{99}{10} = 9{,}9.$$

$\underline{La\ superficie\ deshelada\ a\ los\ 6\ días\ es\ de\ 9\ km^2\ y\ a\ los\ 87\ dias\ de\ 9{,}9\ km^2}.$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(t) = \frac{10 \cdot (t+3) - (10t+21) \cdot 1}{(t+3)^2} = \frac{10t+30-10t-21}{(t+3)^2} = \frac{9}{(t+3)^2} \Rightarrow f'(t) > 0, \forall t \in R.$$

$\underline{La\ función\ de\ deshelado\ es\ monótona\ creciente}.$

c)

$$f(t) = \frac{10t+21}{t+3} = \frac{10t+30-9}{t+3} = \frac{10t+30}{t+3} - \frac{9}{t+3} = 10 - \frac{9}{t+3} = g(t).$$

$\underline{Las\ funciones\ f(t)\ y\ g(t)\ son\ equivalentes}.$

d)

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{10t+21}{t+3} = 10.$$

$\underline{Con\ el\ tiempo\ el\ deshielo\ tiende\ a\ ser\ constantemente\ de\ 10\ km^2}.$

****

3º) En una clase hay tres llaveros. El primer llavero (azul) tiene 5 llaves. El segundo (rojo) tiene 4 llaves y el tercero (verde) tiene 3 llaves. En cada llavero hay una única llave que abre la puerta del trastero. Se escoge al azar uno de los llaveros. Se pide:

a) Calcula la probabilidad de abrir el trastero con la primera llave que se prueba del llavero escogido.

b) Si se abre el trastero con la primera llave que se prueba, ¿cuál es la probabilidad de que se haya escogido el llavero verde?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera llave que se prueba del llavero escogido al azar no abra y sí lo haga una segunda (distinta de la anterior) que se prueba del mismo llavero?

Sea $P(A)$ la probabilidad de abrir y $P(\overline{A})$ la probabilidad de no abrir.

a)

$$P = P(A) = \overbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}^{Azul} + \overbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}^{Rojo} + \overbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}^{Verde} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\frac{12+15+20}{60} = \frac{47}{180} = \underline{0{,}2611}.$$

b)

$$P = P(Ve/A) = \frac{P(Ve \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{47}{180}} = \underline{\frac{20}{47} = 0{,}4255}.$$

c)

$$P = P\left(Az \cap \overline{A} \cap A\right) + P\left(Ro \cap \overline{A} \cap A\right) + P\left(Ve \cap \overline{A} \cap A\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{15} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} = \frac{12+15+20}{180} = \underline{\frac{47}{180} = 0{,}2611}.$$

****