

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****JULIO – 2019**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Un taller fabrica dos productos A y B. La producción de una unidad del producto A requiere 30 minutos para montar las piezas que lo forman y 40 minutos para pintarlo y la producción de una unidad del producto B exige 40 minutos para montar las piezas y 30 minutos para pintarlo. Cada día se puede destinar como máximo 10 horas para montar piezas y 11 horas, también como máximo, para pintar los productos producidos. Cada unidad del producto A se vende a 40 euros y cada unidad del producto B se vende a 35 euros. ¿Cuántas unidades se han de producir de cada producto para obtener el máximo ingreso? ¿Cuál es dicho ingreso máximo?

Sean x e y el número de productos de los tipos A y B que se fabrican en el taller, respectivamente.

$$\text{Las restricciones son: } \left. \begin{array}{l} 30x + 40y \leq 600 \\ 40x + 30y \leq 660 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + 4y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 66 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 3x + 4y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	20
y	15	0

$$\textcircled{2} \Rightarrow 4x + 3y \leq 66 \Rightarrow y \leq \frac{66-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	0	12
y	22	6

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x + 4y = 60 \end{cases} \Rightarrow A(0, 15).$$

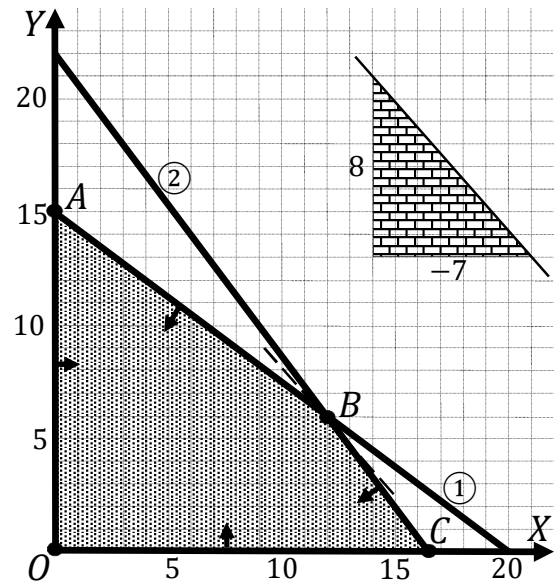
$$B \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 60 \\ 9x + 12y = 180 \\ 4x + 3y = 66 \\ 16x + 12y = 264 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9x - 12y = -180 \\ 16x + 12y = 264 \end{cases} \Rightarrow 7x = 84 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 12; 36 + 4y = 60; 4y = 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 6 \Rightarrow B(12, 6).$$

$$C \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 4x + 3y = 66 \end{cases} \Rightarrow 4x = 66; 2x = 33; x = 16,5 \Rightarrow C(16,5; 0).$$



La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 40x + 35y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 15) = 40 \cdot 0 + 35 \cdot 15 = 0 + 525 = 525.$$

$$B \Rightarrow f(12, 6) = 40 \cdot 12 + 35 \cdot 6 = 480 + 210 = 690.$$

$$C \Rightarrow f(16,5; 0) = 40 \cdot 16,5 + 35 \cdot 0 = 660 + 0 = 660.$$

El máximo se produce en el punto $B(12, 6)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(12, 6)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 40x + 35y = 0 \Rightarrow y = -\frac{40}{35}x = -\frac{8}{7}x \Rightarrow m = -\frac{8}{7}.$$

El máximo ingreso se obtiene con 12 productos tipo A y 6 de tipo B.

El ingreso máximo es de 690 euros.

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

a)

El dominio de una función racional es el conjunto de números reales, excepto los valores que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0; x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \{-2, 1\}}.$$

$$\text{Corte con el eje Y: } x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{A\left(0, \frac{3}{2}\right)}.$$

$$\text{Cortes con el eje X: } f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = 0; x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{B(-1, 0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{C(3, 0)} \end{cases}.$$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x-2} = 1.$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal de la función.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

Las rectas $x = -2$ y $x = 1$ son asíntotas verticales.

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2) \cdot (x^2+x-2) - (x^2-2x-3) \cdot (2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \\ &= \frac{2x^3+2x^2-4x-2x^2-2x+4-(2x^3+x^2-4x^2-2x-6x-3)}{(x^2+x-2)^2} = \\ &= \frac{2x^3+2x^2-4x-2x^2-2x+4-2x^3-x^2+4x^2+2x+6x+3}{(x^2+x-2)^2} = \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x^2+2x+7}{(x^2+x-2)^2} = 0; \quad 3x^2 + 2x + 7 = 0; \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-84}}{2a} \Rightarrow x \notin \mathbb{R}.$$

La función es monótona creciente en su dominio.

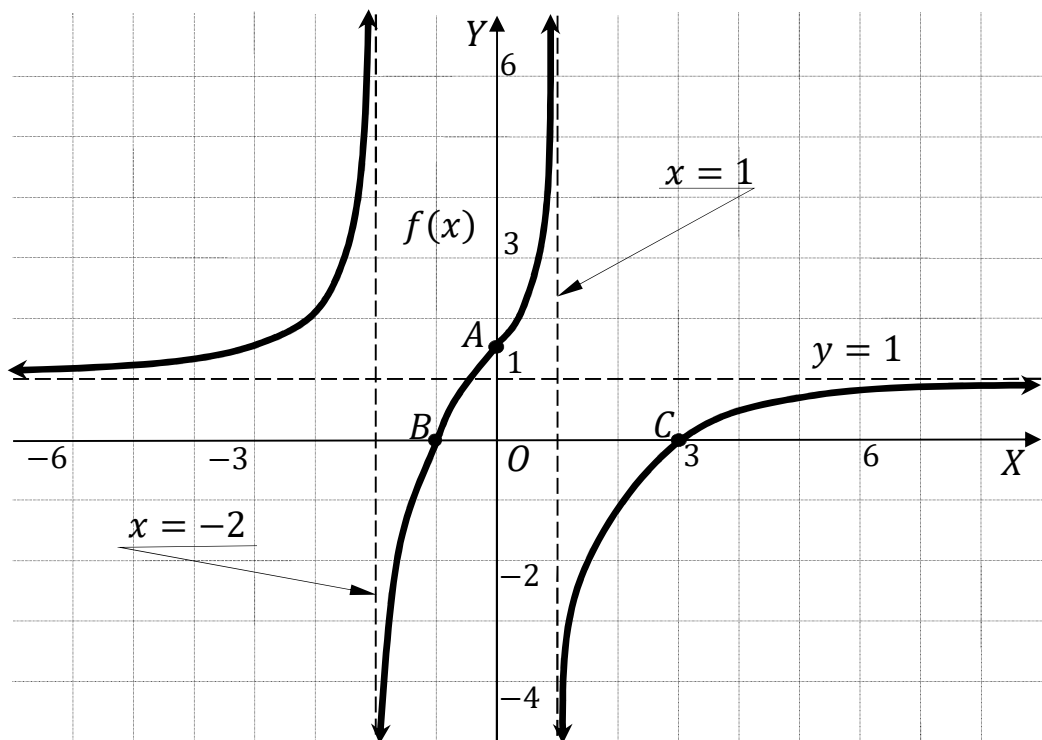
d)

Como consecuencia del apartado anterior:

La función $f(x)$ no tiene máximos ni mínimos relativos.

e)

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:

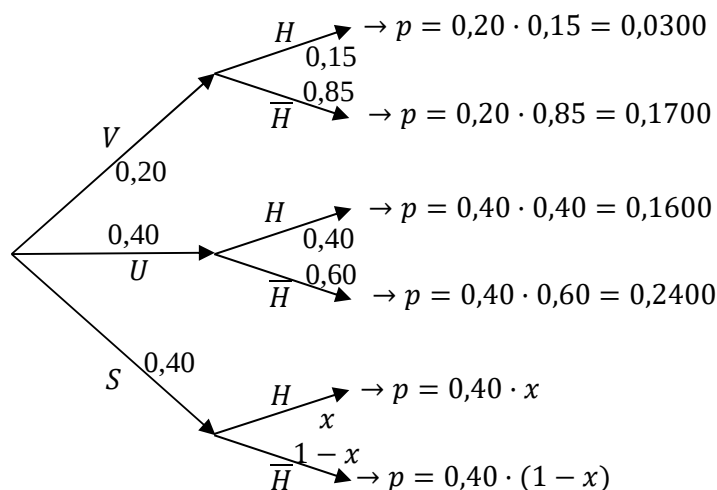


3º) Un modelo de coche se fabrica en tres versiones: Van, Urban y Suv. El 25 % de los coches son de motor híbrido. El 20 % son de tipo Van y el 40 % de tipo Urban. El 15 % de los de tipo Van y el 40 % de los de tipo Urban son híbridos. Se elige un coche al azar. Calcula:

- La probabilidad de que sea de tipo Urban, sabiendo que es híbrido.
- La probabilidad de que sea de tipo Van, sabiendo que no es híbrido.
- La probabilidad de que sea híbrido, sabiendo que es de tipo Suv.
- La probabilidad de que no sea de tipo Van ni tampoco sea híbrido.

Datos: $P(H) = 0,25$; $P(V) = 0,20$; $P(U) = 0,40$.

Sabiendo que $P(V) = 0,20$; $P(U) = 0,40$ tiene que ser $P(S) = 0,40$.



El valor de x puede obtenerse sabiendo que $P(H) = 0,25$:

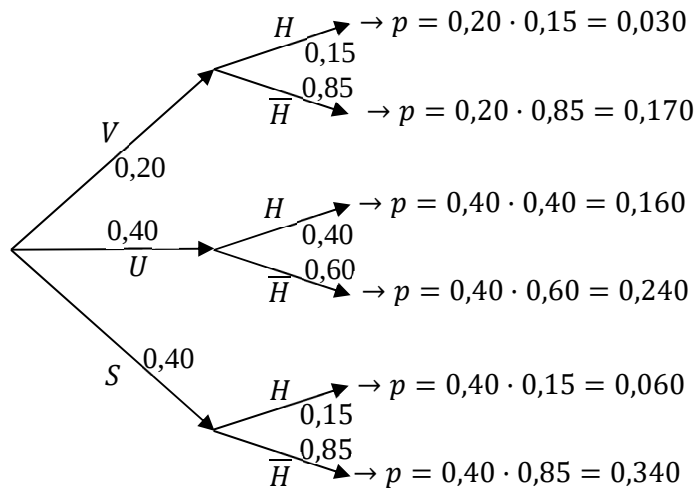
$$P(H) = 0,25 \Rightarrow P(V \cap H) + P(U \cap H) + P(S \cap H) = 0,25;$$

$$P(V) \cdot P(H/V) + P(U) \cdot P(H/U) + P(S) \cdot P(H/S) = 0,25;$$

$$0,20 \cdot 0,15 + 0,40 \cdot 0,40 + 0,40 \cdot x = 0,25; \quad 0,030 + 0,160 + 0,40 \cdot x = 0,25;$$

$$0,190 + 0,40 \cdot x = 0,25; \quad 0,40 \cdot x = 0,25 - 0,19 = 0,06 \Rightarrow x = \frac{0,06}{0,40} = 0,15.$$

Ya puede completarse el diagrama del árbol:



a)

$$P = P(U/H) = \frac{P(U \cap H)}{P(H)} = \frac{P(U) \cdot P(H/U)}{P(H)} = \frac{0,40 \cdot 0,40}{0,25} = \frac{0,16}{0,25} = \underline{0,64}.$$

b)

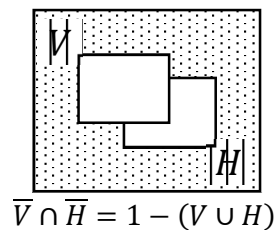
$$P = P(V/\bar{H}) = \frac{P(V \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(V) \cdot P(\bar{H}/V)}{1 - P(H)} = \frac{0,20 \cdot 0,85}{1 - 0,25} = \frac{0,17}{0,75} = \underline{0,2267}.$$

c)

$$P = P(H/S) = \frac{P(S \cap H)}{P(S)} = \frac{P(S) \cdot P(H/S)}{P(S)} = \frac{0,40 \cdot 0,15}{0,40} = \frac{0,06}{0,40} = \underline{0,15}.$$

d)

$$\begin{aligned}
 P(V \cup H) &= P(V) + P(H) - P(V \cap H) = \\
 &= P(V) + P(H) - P(V) \cdot P(H/V) = \\
 &= 0,20 + 0,25 - 0,20 \cdot 0,15 = 0,45 - 0,03 = 0,42.
 \end{aligned}$$



$$P = P(\bar{V} \cap \bar{H}) = 1 - P(V \cup H) = 1 - 0,42 = \underline{0,58}.$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$:

a) Calcula el determinante de A

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal.

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3^3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27} \cdot (4 + 4 + 4 + 8 - 1 + 8) =$$
$$= \frac{1}{27} \cdot 27 = 1.$$

$$\underline{|A| = 1.}$$

b)

Por definición de inversa de una matriz es $A \cdot A^{-1} = I$. Como se sabe que A es ortogonal se cumple que $A^{-1} = A^t$, por lo que tiene que cumplirse que $A \cdot A^t = I$:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} & \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} & \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} & \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Queda comprobado que A es ortogonal.

c)

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Como } A^{-1} = A^t:$$

$$I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{Solución: } x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{5}{3}.$$

2º) Consideramos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{ax^2}{x^2+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$:

a) Calcular el valor de a para que la función $y = f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para el valor de a obtenido, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

c) Para el valor de a obtenido, calcula las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

d) Calcula $I = \int_{-2}^1 f(x) \cdot dx$.

a)

La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 3x + 3) = 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2}{x^2+1} = \frac{a}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 = \frac{a}{2} \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

b)

$$\text{La función resulta } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{2x^2}{x^2+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4x}{(x^2+1)^2} (*) & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

$$(*) \quad g(x) = \frac{2x^2}{x^2+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{4x \cdot (x^2+1) - 2x^2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x^3 + 4x - 4x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

$$(-\infty, 1] \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \notin (-\infty, 1].$$

$$(1, \infty) \Rightarrow \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0; \quad 4x = 0; \quad x = 0 \notin (1, +\infty).$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1).}$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty).}$$

c)

En el intervalo $(-\infty, 1)$ no hay asíntotas por ser una función polinómica.

Intervalo $(1, +\infty)$:

$$x^2 + 1 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{No hay asíntotas verticales.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 + 1} = 2 \Rightarrow \underline{\text{La recta } x = 2 \text{ es asíntota horizontal en } (1, +\infty).}$$

d)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^1 f(x) \cdot dx = \int_{-2}^1 (x^2 - 3x + 3) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 3x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) - \left[\frac{(-2)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} + 3 \cdot (-2) \right] = \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 3 + \frac{8}{3} + 6 + 6 = \\ &= \frac{9}{3} - \frac{3}{2} + 15 = 18 - \frac{3}{2} = \frac{33}{2} = 16,5. \end{aligned}$$

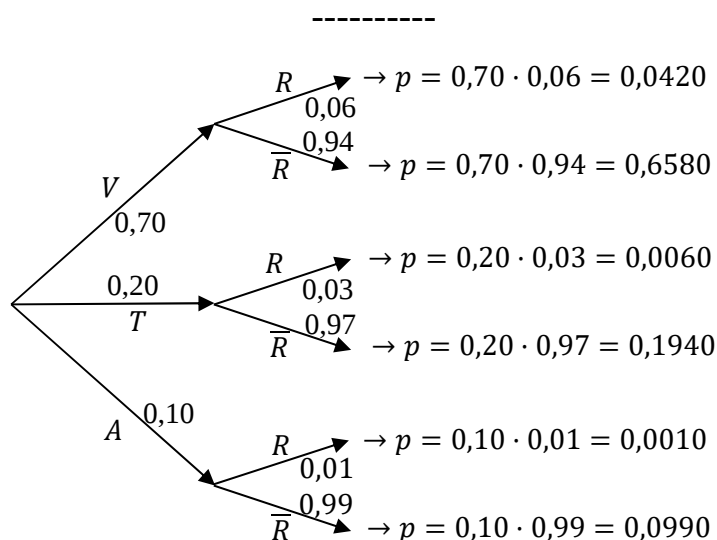
$$\underline{I = \int_{-2}^1 f(x) \cdot dx = 16,5.}$$

3º) Un estudiante acude a la universidad el 70 % de las veces usando su propio vehículo, y el doble de veces en transporte público que andando. Llega tarde el 1 % de las veces que acude andando, el 3 % de las que lo hace en transporte público y el 6 % de las que lo hace con su propio vehículo. Se pide:

a) La probabilidad de que un día cualquiera llegue puntualmente.

b) La probabilidad de que haya acudido en transporte público, sabiendo que ha llegado tarde.

c) La probabilidad de que no haya acudido andando, sabiendo que ha llegado puntualmente.



a)

$$\begin{aligned}
 P &= P(\bar{R}) = P(V \cap \bar{R}) + P(T \cap \bar{R}) + P(A \cap \bar{R}) = \\
 &= P(V) \cdot P(\bar{R}/V) + P(T) \cdot P(\bar{R}/T) + P(A) \cdot P(\bar{R}/A) = \\
 &= 0,70 \cdot 0,94 + 0,20 \cdot 0,97 + 0,10 \cdot 0,99 = 0,6580 + 0,1940 + 0,0990 = \underline{0,9510}.
 \end{aligned}$$

b)

$$P = P(T/R) = \frac{P(T \cap R)}{P(R)} = \frac{P(T) \cdot P(R/T)}{1 - P(\bar{R})} = \frac{0,20 \cdot 0,03}{1 - 0,9510} = \frac{0,0060}{0,0490} = \underline{0,1224}.$$

c)

$$\begin{aligned}
 P &= P(V/\bar{R}) + P(T/\bar{R}) = \frac{P(V \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} + \frac{P(T \cap \bar{R})}{P(\bar{R})} = \frac{P(V) \cdot P(\bar{R}/V) + P(T) \cdot P(\bar{R}/T)}{P(\bar{R})} = \\
 &= \frac{0,70 \cdot 0,94 + 0,20 \cdot 0,97}{0,9510} = \frac{0,6580 + 0,1940}{0,9510} = \frac{0,8520}{0,9510} = \underline{0,8959}.
 \end{aligned}$$
