PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se elegirá solo UNA de las OPCIONES, A o B, y se han de hacer los tres problemas de esa opción. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberían estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Un inversor dispone de 9.000 euros y quiere invertir en dos tipos de productos financieros: A y B. La inversión en el producto A debe superar los 5.000 euros y, además, esta debe ser el doble, al menos, que la inversión en el producto B. Se sabe que la rentabilidad del producto A es del 2,7 % y la del producto B del 6,3 %.

$a)$ ¿Cuánto ha de invertir en cada producto para que la rentabilidad sea máxima?

$b)$ ¿Cuál es esa rentabilidad máxima?

$a)$

Sean x e y las cantidades (en miles de euros) que invierte en los tipos financieros A y B, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 9 \\ x\geq 2y \\ x\geq 5;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\leq 9 \Rightarrow y\leq 9-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	6
y	9	3

② $\Rightarrow x\geq 2y \Rightarrow y\leq \frac{1}{2}x \Rightarrow P(1,0)\rightarrow Si.$

x	0	8
y	0	4

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

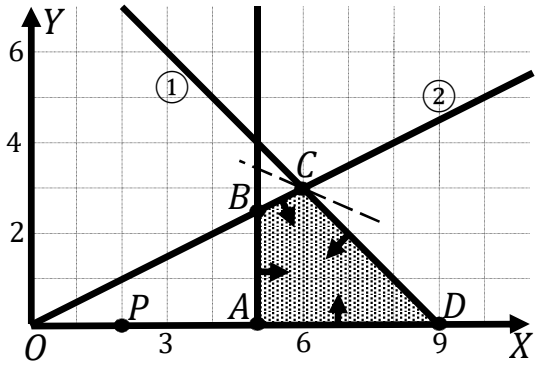
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

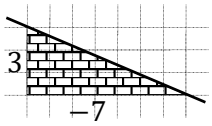
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 5 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(5,0).$ $\qquad$ $B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 5 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow B(5,2'5).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 9 \\ x = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 9;$

$y = 3 \Rightarrow C(6,3).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow D(9,0).$





La función de objetivos: $f(x,y) = 0{,}27x + 0{,}63y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(5,0) = 0{,}27 \cdot 5 + 0{,}63 \cdot 0 = 1{,}35 + 0 = 1{,}35.$

$B \Rightarrow f(5,2'5) = 0{,}27 \cdot 5 + 0{,}63 \cdot 2{,}5 = 1{,}35 + 1{,}575 = 2{,}925.$

$C \Rightarrow f(6,3) = 0{,}27 \cdot 6 + 0{,}63 \cdot 3 = 1{,}62 + 1{,}89 = 3{,}51.$

$D \Rightarrow f(9,0) = 0{,}27 \cdot 9 + 0{,}63 \cdot 0 = 2{,}43 + 0 = 2{,}43.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 0{,}27x + 0{,}63y = 0 \Rightarrow y = -\frac{0{,}27}{0{,}63}x = -\frac{3}{7}x \Rightarrow m = -\frac{3}{7}.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ invirtiendo\ 6.000\ euros\ en\ A\ y\ 3.000\ euros\ en\ B.}$

$b)$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 3.510\ euros.}$

****

2º) Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{2-x}$, se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

---

a)

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{2\}}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \rightarrow O(0,0)$.

$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2-x} = 0;\ \ x^2 = 0;\ \ x = 0 \rightarrow O(0,0)$.

$\underline{El\ único\ punto\ de\ corte\ con\ los\ ejes\ de\ f(x)\ es\ el\ origen\ de\ coordenadas}$.

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2\ \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 2\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Aunque no se piden, se obtienen las asíntotas oblicuas.

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{2-x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{2x-x^2} = -1.$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - mx\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2-x} + x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{2-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2-x} = -2.$$

$$\underline{La\ recta\ y = -x - 2\ es\ asíntota\ oblicua.}$$

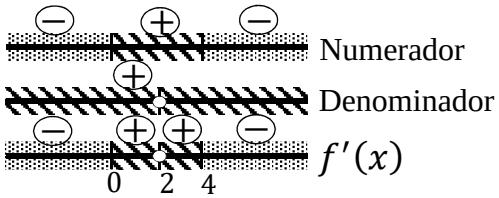
$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(2-x)-x^2\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x-2x^2+x^2}{(2-x)^2} = \frac{4x-x^2}{(2-x)^2} = \frac{x(4-x)}{(2-x)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(4-x)}{(2-x)^2} = 0;\ x(4-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 4.$$

De la observación de la figura se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:



$$\underline{Crecimiento: (0,2) \cup (2,4).}$$

$$\underline{Decrecimiento: (-\infty,0) \cup (4,+\infty).}$$

$d)$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)^2 - x(4-x)\cdot[2\cdot(2-x)\cdot(-1)]}{(2-x)^4} = \frac{(4-2x)\cdot(2-x)+2x(4-x)}{(2-x)^3} =$$

$$= \frac{8-4x-4x+2x^2+8x-2x^2}{(2-x)^3} = \frac{8}{(2-x)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{8}{8} = 1 > 0 \ \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

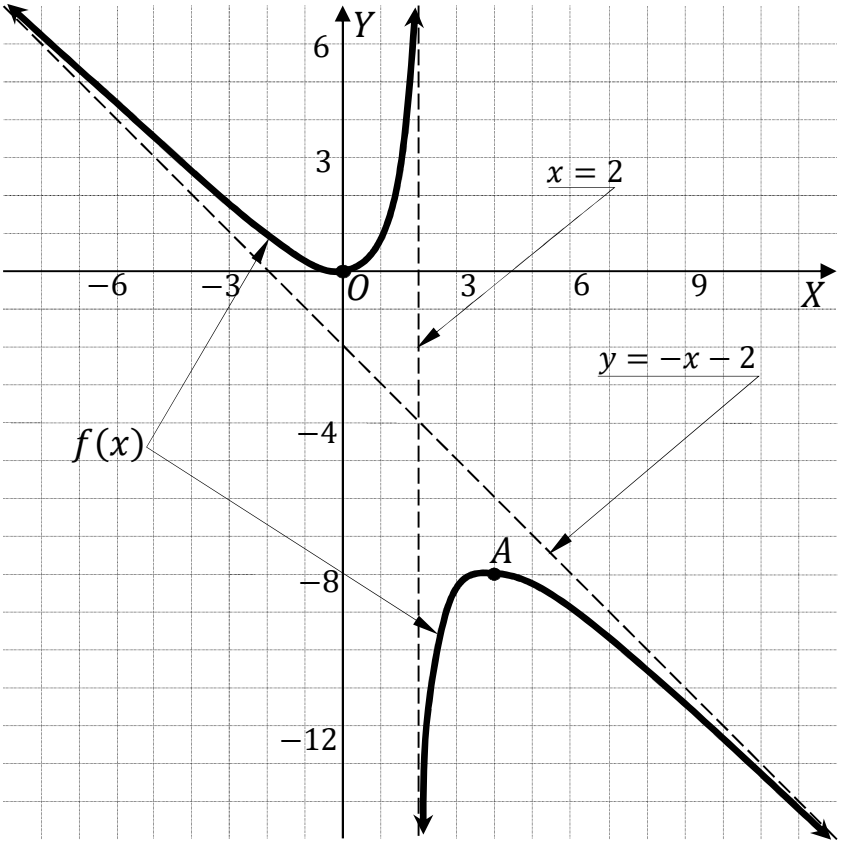
$$f(0) = \frac{0}{2-0} = 0 \ \Rightarrow \ \underline{Mínimo: O(0,0).}$$

$$f''(4) = \frac{8}{-8} = -1 < 0 \ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 4.$$

$$f(4) = \frac{4^2}{2-4} = \frac{16}{-2} = -8 \ \Rightarrow \ \underline{Máximo: A(4,-8).}$$

$d)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:


Y
6
3
x = 2
−6
−3
O
3
6
9
X
y = −x − 2
f(x)
−4
A
−8
−12

****

3º) En una cierta ciudad, las dos terceras partes de los hogares tienen una Smart TV, de los cuales, las tres octavas partes han contratado algún servicio de televisión de pago, porcentaje que baja al 30 % si consideramos el total de los hogares. Si se elige un hogar al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV pero sí haya contratado televisión de pago?

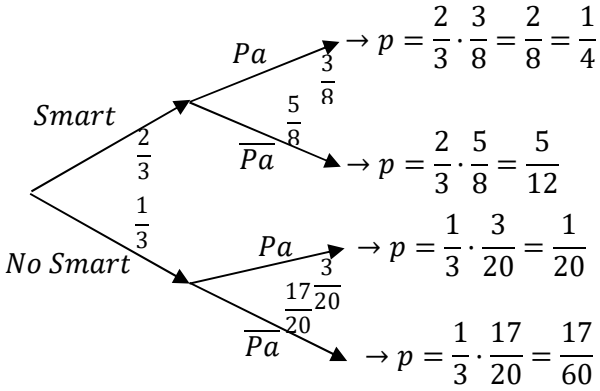
b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga Smart TV si sabemos que ha contratado televisión de pago?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga Smart TV si sabemos que no ha contratado televisión de pago?

Siendo x los hogares que no tienen Smart TV y televisión de pago:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot x=\frac{30}{100};\ \ \frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot x=\frac{3}{10}\Rightarrow(m.c.m.\rightarrow 120)\Rightarrow 30+40x=36;$$

$40x=6;\ \ x=\frac{6}{40}=\frac{3}{20}.$



a)

$$P=P\left(\overline{S}\cap Pa\right)=P\left(\overline{S}\right)\cdot P\left(Pa/\overline{S}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}=\underline{\frac{1}{20}=0{,}05.}$$

b)

$$P=P(S/Pa)=\frac{P(S\cap Pa)}{P(Pa)}=\frac{P(S)\cdot P(Pa/S)}{P(S)\cdot P(Pa/S)+P\left(\overline{S}\right)\cdot P\left(Pa/\overline{S}\right)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{20}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{20}}=$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5+1}{20}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{6}{20}}=\frac{20}{24}=\underline{\frac{5}{6}=0{,}8333.}$$

c)

$$P=P\left(\overline{S}/\overline{Pa}\right)=\frac{P\left(\overline{S}\cap\overline{Pa}\right)}{P\left(\overline{Pa}\right)}=\frac{P\left(\overline{S}\right)\cdot P\left(\overline{Pa}/\overline{S}\right)}{1-P(Pa)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{20}}{1-\frac{6}{20}}=\frac{\frac{17}{60}}{\frac{14}{20}}=\underline{\frac{17}{42}=0{,}4048.}$$

****

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcular $(AB)^{-1}$. b) Calcular $A \cdot B^t - A^t \cdot B$.

c) Resolver la ecuación $B^t \cdot X + A^t \cdot B = A^t$, siendo A^t y B^t las matrices traspuesta de A y B, respectivamente.

---

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

La inversa de $(A \cdot B)$ se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A \cdot B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to -F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{4}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 8F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

$$\underline{(AB)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.}$$

b)

$$A \cdot B^t - A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{A \cdot B^t - A^t \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.}$$

c)

$$B^t \cdot X + A^t \cdot B = A^t; \;\; B^t \cdot X = A^t - A^t \cdot B = A^t \cdot I - A^t \cdot B;$$

$$B^t \cdot X = A^t \cdot (I - B); \;\; (B^t)^{-1} \cdot B^t \cdot X = (B^t)^{-1} \cdot A^t \cdot (I - B);$$

$$I \cdot X = (B^t)^{-1} \cdot A^t \cdot (I - B) \;\Rightarrow\; X = B^{-1} \cdot A^t \cdot (I - B). \quad (*)$$

$B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Se obtiene $(B^t)^{-1}$ por el método de Gauss-Jordan.

$$(B^t/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \\ F_2 \to -F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$I - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Sustituyendo los valores obtenidos en la expresión (*):

$$X = B^{-1} \cdot A^t \cdot (I - B) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -17 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 10 & -17 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}}.$$

****

2º) En los primeros 6 años, una empresa obtuvo unos beneficios (en decenas de miles de euros) que pueden representarse mediante la función $f(t) = t^3 - 8t^2 + 15t$, donde t es el tiempo en años transcurridos.

a) Determinar los periodos en los que la empresa tuvo beneficios y en los que tuvo pérdidas.

b) ¿En qué valor de t se alcanzó el máximo beneficio y cuál fue este?

c) ¿En qué valor de t se tuvo la máxima pérdida y cuál fue esta?

d) Suponiendo que a partir de los 6 años los beneficios siguen la misma función, ¿volverá a tener la empresa periodos alternos de beneficios y pérdidas? Justifica la respuesta.

---

a)

Los valores en que la función no tuvo beneficios ni pérdidas son los siguientes:

$$f(t) = 0 \Rightarrow t^3 - 8t^2 + 15t = 0;\ \ t(t^2 - 8t + 15) = 0 \Rightarrow t_1 = 0;$$

$$t^2 - 8t + 15 = 0;\ \ t = \frac{8 \pm \sqrt{64-60}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2} = 4 \pm 1 \Rightarrow t_2 = 3, t_3 = 5.$$

Por ser polinómica la función beneficios, las raíces obtenidas (se excluye la solución cero, que es, lógicamente, al comienzo) dividen su dominio $[0, 6]$ en tres periodos donde el valor de la función es positivo y negativo, alternativamente. Considerando, por ejemplo, el valor $t = 1$ es:

$$f(1) = 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 = 1 - 8 + 15 = 8 > 0.$$

$$\underline{La\ empresa\ tuvo\ beneficios\ en\ (1, 3) \cup (5, 6)\ y\ pérdidas\ en\ (3, 5).}$$

b)

$$f'(t) = 3t^2 - 16t + 15.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 16t + 15 = 0;\ \ t = \frac{16 \pm \sqrt{256-180}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{8 - \sqrt{19}}{3} \cong 1{,}21;\ \ t_2 = \frac{8 + \sqrt{19}}{3} \cong 4{,}12.$$

Las ganancias se producen en el periodo de las ganancias, por lo cual, $t = 1{,}21$.

$$f(1{,}21) = 1{,}21^3 - 8 \cdot 1{,}21^2 + 15 \cdot 1{,}21 = 1{,}772 - 11{,}713 + 18{,}15 = 8{,}21.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ se\ produce\ para\ t = 1{,}21\ años\ y\ fue\ de\ 82.100\ euros.}$$

$c)$

La máximas pérdidas se producen, lógicamente, en el mínimo beneficio. Una función tiene un mínimo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(t) = 3t^2 - 16t + 15.$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 16t + 15 = 0;\ \ t = \frac{16 \pm \sqrt{256-180}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm \sqrt{76}}{2 \cdot 3} = \frac{16 \pm 2\sqrt{19}}{2 \cdot 3} =$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3} \Rightarrow t_1 = \frac{8-\sqrt{19}}{3} \cong 1{,}21;\ \ t_2 = \frac{8+\sqrt{19}}{3} \cong 4{,}12.$$

La solución que está en el periodo de las pérdidas es $t = 4{,}12$.

$$f(4{,}12) = 4{,}12^3 - 8 \cdot 4{,}12^2 + 15 \cdot 4{,}12 = 69{,}935 - 135{,}795 + 61{,}8 =$$

$$= 131{,}735 - 135{,}795 = -4{,}06.$$

$$\underline{La\ máxima\ pérdida\ se\ produce\ para\ t = 4{,}12\ años\ y\ fue\ de\ 40.600\ euros}.$$

$d)$

La función es cúbica, por lo cual tiene un máximo y un mínimo únicamente; esto quiere decir que su tendencia es creciente para $t > 6$, lo cual indica que:

$$\underline{En\ el\ futuro\ la\ empresa\ solamante\ tendría\ beneficios}.$$

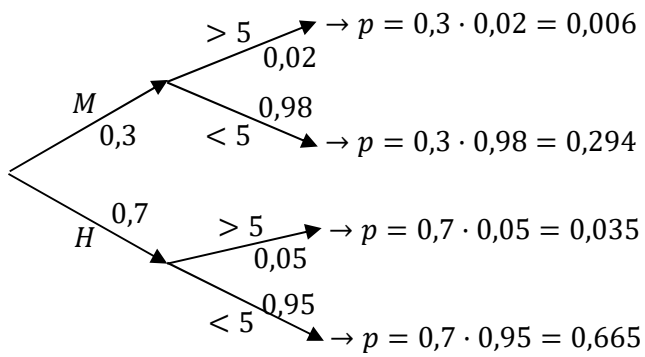
****

3º) Sabemos que el 5 % de los hombres y el 2 % de las mujeres que trabajan en una empresa tienen un salario mensual mayor que 5.000 euros. Se sabe también que el 30 % de los trabajadores de dicha empresa son mujeres.

a) Calcula la probabilidad de que un trabajador de la empresa, elegido al azar, tenga un salario mensual mayor que 5.000 euros.

b) Se elige al azar un trabajador de la empresa y se observa que su salario mensual es mayor que 5.000 euros, ¿cuál es la probabilidad de que dicho trabajador sea mujer?

c) ¿Qué porcentaje de trabajadores de la empresa son hombres con un salario mensual mayor que 5.000 euros?



a)

$$P = P(>5) = P(M)\cdot P(>5/M) + P(H)\cdot P(>5/H) = b)$$

$$= 0{,}3\cdot 0{,}02 + 0{,}7\cdot 0{,}05 = 0{,}006 + 0{,}035 = \underline{0{,}041}.$$

b)

$$P = P(M|>5) = \frac{P(M\cap>5)}{P(>5)} = \frac{P(M)\cdot P(>5/M)}{P(M)\cdot P(>5/M)+P(H)\cdot P(>5/H)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}02}{0{,}3\cdot 0{,}02+0{,}7\cdot 0{,}05} =$$

$$= \frac{0{,}006}{0{,}006+0{,}035} = \frac{0{,}006}{0{,}041} = \underline{0{,}1463}.$$

c)

$$P = P(H\cap>5) = P(H)\cdot P(>5/H) = 0{,}7\cdot 0{,}05 = \underline{0{,}035 = 3{,}5\ \%}.$$

****