PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se han de contestar tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen. Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) En una explotación ganadera se crían 100 animales. Cada ejemplar necesita diariamente como mínimo 5 kg de piensos de origen animal y como mínimo 3 kg de piensos de origen vegetal. Hay dos marcas A y B que venden sacos con mezclas de dichos piensos. La marca A vende sacos con 7 kg de piensos animales y 3 kg de piensos vegetales. La marca B vende sacos con 6 kg de piensos animales y 4 kg de piensos vegetales. Si los sacos de la marca A cuestan 12 euros y los de la marca B cuestan 11 euros:

$a)$ ¿Cuál es la combinación de compra de sacos de cada marca que se ha de realizar semanalmente para minimizar el coste?

$b)$ ¿Cuál será dicho coste mínimo?

$a)$

Sean x e y el número sacos de las marcas A y B que se compran semanalmente, respectivamente.

Cada semana se necesitan, como mínimo, los siguientes kg de piensos de origen animal y vegetal:

$$Animal: 7 \cdot 100 \cdot 5 = 3.500\ kg. \quad Vegetal: 7 \cdot 100 \cdot 3 = 2.100\ kg.$$

Las restricciones del problema son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 7x + 6y \geq 3.500 \\ 3x + 4y \leq 2.100 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$$① \Rightarrow 7x + 6y \geq 3.500 \Rightarrow y \geq \frac{3.500 - 7x}{6} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$$

x	500	200
y	0	0

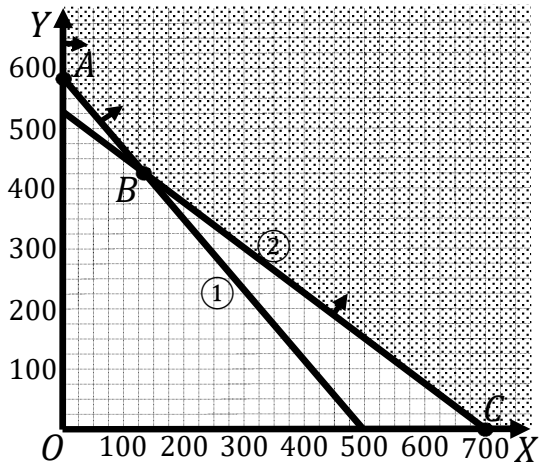
$② \Rightarrow 3x + 4y \geq 2.100 \Rightarrow y \geq \frac{2.100-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	300	500
y	300	150

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.

La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,y) = 12x + 11y.$



Los vértices significativos de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 7x + 6y = 3.500 \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{1.750}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\left(0, \frac{1.750}{3}\right).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x + 6y = 3.500 \\ 3x + 4y = 2.100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 14x + 12y = 7.000 \\ -9x - 12y = -6.300 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 700;\ \ x = 140;$$

$$420 + 4y = 2.100;\ \ 4y = 2.100 - 420 = 1.680;\ \ y = 420 \Rightarrow B(140, 420).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 4y = 2.100 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2.100}{3} = 700 \Rightarrow D(700, 0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f\left(0, \frac{1.750}{3}\right) = 12 \cdot 0 + 11 \cdot \frac{1.750}{3} = 0 + 6{,}416{,}67 = 6{,}416{,}67.$$

$$B \Rightarrow f(140, 420) = 12 \cdot 140 + 11 \cdot 420 = 1.680 + 4.620 = 6.300.$$

$$C \Rightarrow f(7000, 0) = 12 \cdot 700 + 11 \cdot 0 = 8.400 + 0 = 8.400.$$

El mínimo se produce en el punto $B(140, 420)$.

$\underline{Debe\ comprarse\ semanalmente\ 140\ sacos\ de\ la\ marca\ A\ y\ 420\ de\ la\ B.}$

$b)$

$\underline{El\ gasto\ mínimo\ semanal\ es\ de\ 6.300\ euros.}$

****

2º) En una empresa de 57 trabajadores el gasto en salarios en este mes ha sido de 62.000 euros. En la empresa hay trabajadores de tres categorías, denominadas A, B y C. Este mes el salario de los trabajadores de la categoría A ha sido de 800 euros, el de los trabajadores de la categoría B de 1.000 euros y el de los trabajadores de la categoría C de 2.000 euros. Una auditoría externa ha indicado que la desigualdad salarial entre los trabajadores de la empresa es excesiva, por lo que se ha decidido que el próximo mes se incrementará en un 4 % el salario a los trabajadores de la categoría A, se mantendrá el salario a los trabajadores de la categoría B y se rebajará en un 10 % el salario a los trabajadores de la categoría C. De esta manera, el gasto de la empresa en salarios en el próximo mes será un 2 % inferior al gasto en salarios de este mes. ¿Cuántos trabajadores de cada categoría tiene la empresa?

Sean x, y, z el número de trabajadores de la empresa de los grupos A, B y C, respectivamente.

Los sueldos de los trabajadores de los grupos A y C, una vez aplicada la recomendación de la auditoría, son los siguientes:

$A \to 1{,}04 \cdot 800 = 832\ euros.$ $\qquad C \to 0{,}9 \cdot 2.000 = 1.800\ euros.$

El nuevo gasto salarial es el siguiente: $0{,}98 \cdot 62.000 = 60.760\ euros.$

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ 800x+1.000y+2.000z=62.000 \\ 832x+1.000y+1.800z=60.760 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} x+y+z=57 \\ 4x+5y+10z=310 \\ 104x+125y+225z=7.595 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 4 & 5 & 10 & 310 \\ 104 & 125 & 225 & 7.595 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - 4F_1 \\ F_3 \to F_3 - 104F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 21 & 121 & 1.667 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 21F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 57 \\ 0 & 1 & 6 & 82 \\ 0 & 0 & 5 & 55 \end{pmatrix} \Rightarrow 5z = 55 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 11. \quad y + 6z = 82; \quad y + 66 = 82 \Rightarrow y = 16. \quad x + 16 + 11 = 57 \Rightarrow x = 30.$$

$$\underline{En\ la\ empresa\ hay\ 30\ trabajadores\ de\ categoría\ A;\ 16\ de\ B\ y\ 11\ de\ C.}$$

****

3º) Dada la función $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-4}$, se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si las hubiera.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

---

a)

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2 \;\Rightarrow\; \underline{D(f) \Rightarrow R - \{-2, 2\}}.$$

Cortes eje OX: $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{x^2-4} = 0;\;\; 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,0)} \\ x_2 = 1 \rightarrow \underline{B(1,0)} \end{cases}.$

Punto de corte con el eje OY: $f(0) = \frac{1-0^2}{0^2-4} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{C\left(0, -\frac{1}{4}\right)}.$

b)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^2}{x^2-4} = -1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y = -1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales}.$$

c)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-2x\cdot(x^2-4)-(1-x^2)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-2x^3+8x-2x+2x^3}{(x^2-4)^2} = \frac{10x}{(x^2-4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{10x}{(x^2-4)^2} = 0;\ 10x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Por ser $(x^2-4)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, la función será creciente o decreciente cuando lo sea el numerador de su primera derivada.

Conviene tener en cuenta que la función es par, por ser $f(x) = f(-x)$, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(0,2) \cup (2,+\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty,-2) \cup (-2,0)}.$$

$d)$

De la observación de los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un mínimo relativo en el punto $C\left(0,-\frac{1}{4}\right)$; no obstante se realiza el estudio mediante derivadas.

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; se es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = \frac{10\cdot(x^2-4)^2-10x\cdot[2\cdot(x^2-4)\cdot 2x]}{(x^2-4)^4} = \frac{10\cdot(x^2-4)-40x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{10x^2-40-40x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= \frac{-30x^2-40}{(x^2-4)^3} = \frac{-10\cdot(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{-10\cdot(0+4)}{(0-4)^3} = \frac{-40}{-64} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{Mínimo: C\left(0,-\frac{1}{4}\right)}.$$

Aunque no se pide, se hace el estudio de los periodos de concavidad y convexidad de la función.

Una función es cóncava $(\cap)$ o convexa $(\cup)$ cuando su segunda derivada es negativa o positiva, respectivamente.

Siendo $f''(x) = \frac{-10(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$, cuyo numerador es negativo para cualquier valor

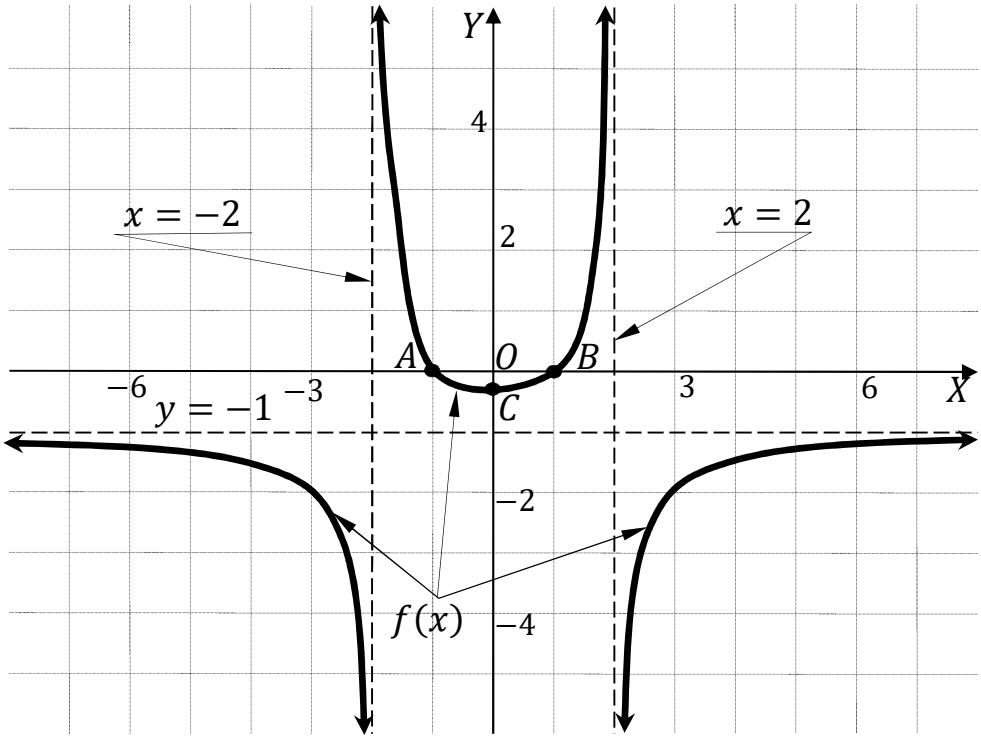
real de x perteneciente al dominio de la función, la segunda derivada será negativa o positiva cuando lo sea su denominador, por lo cual:

$$\underline{Concavidad\ (\cap): f''(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, -2) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{Convexidad\ (\cup): f''(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-2, 2).}$$

$e)$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) Desde el inicio de 1.980, la capacidad (cantidad de gas que puede extraerse) de una explotación gasística, expresada en miles de metros cúbicos, viene dada por la función $f(x) = 36.600 + 1.500x - 15x^2$, donde la variable x representa el tiempo en años transcurridos desde el inicio de 1.980.

a) Calcula la capacidad de la explotación al inicio de 1.980.

b) Calcula cuánto tiempo ha de pasar desde el inicio de 1.980 para que la capacidad alcance su valor máximo, y cuál es dicho valor máximo (en miles de metros cúbicos).

c) Si el beneficio en euros por metro cúbico de gas disminuye con los años según la función $g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12.100}$, calcula cuánto tiempo debe pasar para que la explotación deje de ser rentable y cuál será la capacidad (en miles de metros cúbicos) de la explotación en ese momento.

---

a)

$$f(0) = 36.600.$$

$$\underline{Al\ inicio\ de\ la\ explotación\ la\ capacidad\ era\ de\ 36.000.000\ m^3\ de\ gas.}$$

b)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = 1.500 - 30x.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1.500 - 30x = 0;\ \ 50 - x = 0 \Rightarrow x = 50.$$

$$f''(x) = -30 < 0 \Rightarrow Máx.\ para\ x = 50.$$

$$1.980 + 50 = 2.030.$$

$$\underline{La\ capacidad\ máxima\ de\ la\ explotación\ se\ alcanzará\ el\ año\ 2.020.}$$

$$f(50) = 36.600 + 1.500 \cdot 50 - 15 \cdot 50^2 = 36.600 + 75.000 - 37.500 =$$

$$= 111.600 - 37.500 = 74.100.$$

$$\underline{La\ capacidad\ máxima\ de\ la\ explotación\ será\ de\ 74.100.000\ m^3\ de\ gas.}$$

c)

$$g(x) = 0 \Rightarrow 3 - \frac{3x^2}{12.100} = 0;\ \ 3 = \frac{3x^2}{12.100} \Rightarrow x^2 = 12.100;\ \ x = +\sqrt{12.100} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 110.$$

La explotación dejará de ser rentable cuando el beneficio sea negativo.

Teniendo en cuenta que la función $g(x) = 3 - \frac{3x^2}{12.100}$ es una parábola cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2, que corta al eje de abscisas en el punto de abscisa positiva $P(110, 0)$:

$1.980 + 110 = 2.090.$

$\underline{La\ explotación\ dejará\ de\ ser\ rentable\ el\ año\ 2.090.}$

****

5º) Si A y B son dos sucesos tales que $P(A) = 0{,}4$; $P(B/A) = 0{,}25$; $P(B^c) = 0{,}75$, se pide:

a) ¿Son independientes los sucesos A y B? ¿Por qué?

b) Calcula $P(A \cup B)$. c) Calcula $P(A/B^c)$.

d) Calcula $P(A^c \cup B^c)$ y $P(A^c \cap B^c)$.
(A^c y B^c representan, respectivamente, el suceso complementario de A y el suceso complementario de B).

---

a)

Dos sucesos A y B son independientes cuando $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0{,}25 \Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}25 \cdot P(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}1.$$

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25.$$

$$P(A) \cdot P(B) = 0{,}4 \cdot 0{,}25 = 0{,}1 = P(A \cap B).$$

$\underline{Por\ lo\ expuesto\ anteriormente\ los\ sucesos\ A\ y\ B\ son\ independientes}$.

b)

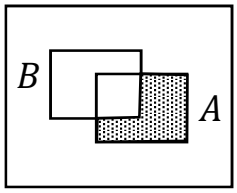
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}4 + [1 - P(B^c)] - 0{,}1 =$$

$$= 0{,}3 + 1 - P(B^c) = 1{,}3 - 0{,}75 \Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0{,}55}.$$

c)

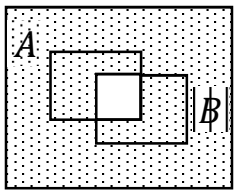
$$P(A/B^c) = \frac{P(A \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)} = \frac{0{,}4 - 0{,}1}{1 - 0{,}25} =$$

$$= \frac{0{,}3}{0{,}75} \Rightarrow \underline{P(A/B^c) = 0{,}4}.$$

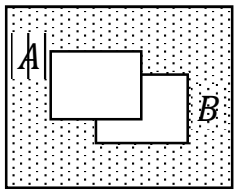


$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$

d)



$\overline{A^c} \cup \overline{B^c} = 1 - A \cap B$



$\overline{A^c} \cup \overline{B^c} = 1 - A \cup B$

$$P(A^c \cup B^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}1 \Rightarrow \underline{P(A^c \cup B^c) = 0{,}9}.$$

$$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}55 \Rightarrow \underline{P(A^c \cap B^c) = 0{,}45}.$$

****

6º) Una empresa fabrica protectores de pantalla para teléfonos móviles. La empresa produce tres tipos de protectores: de 4 pulgadas, de 4,7 pulgadas y de 5 pulgadas. Consideramos la población de los habitantes de una ciudad que poseen un único teléfono móvil y cuya medida es una de estas tres. Un estudio de mercado indica que el 30 % de los teléfonos móviles tienen una pantalla de 4 pulgadas. Este mismo estudio también indica que el 30 % de los usuarios de un teléfono móvil de una pantalla de 4 pulgadas utilizan un protector de pantalla. Este también es el caso del 25 % de los que poseen un teléfono móvil con pantalla de 4,7 pulgadas y del 40 % de los que poseen un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

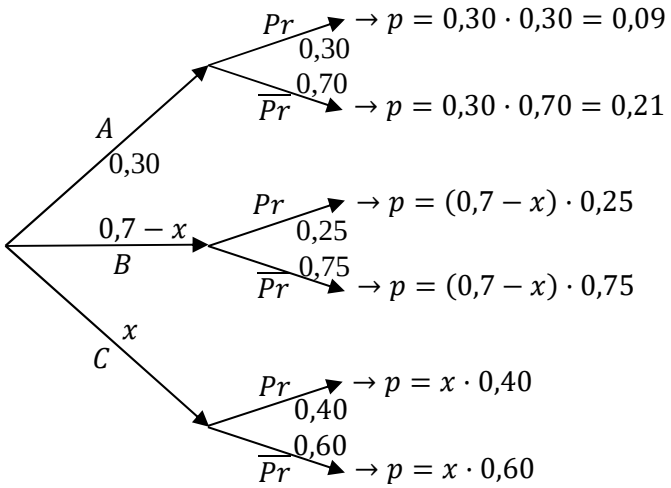
a) Si el 34 % de los que tienen un teléfono móvil usan un protector de pantalla, calculad el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 4,7 pulgadas y el porcentaje de los que usan un teléfono móvil de 5 pulgadas.

b) Se considera un usuario de teléfono móvil con protector de pantalla. Calcula la probabilidad de que utilice un teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

c) Consideramos ahora una persona que tiene un teléfono móvil con protector de pantalla y cuya pantalla no es de 4,7 pulgadas. Calcula la probabilidad de que use teléfono móvil con una pantalla de 5 pulgadas.

Sean los teléfonos según sus pulgadas: $\begin{cases} A \rightarrow 4\ pulgadas \\ B \rightarrow 4{,}7\ pulgadas. \\ A \rightarrow 5\ pulgadas \end{cases}$

Como se desconoce el porcentaje de usuarios que utilizan teléfonos de 4,7 y 5 pulgadas, llamaremos x a la probabilidad de que utilice teléfono de 5 pulgadas de pantalla, con lo cual, la probabilidad de utilizar teléfono de 4,7 pulgada de pantalla es la siguiente: $1 - 0{,}3 - x \rightarrow p = 0{,}7 - x$.



a)

$$P = P(Pr) = 0{,}34 \Rightarrow P(A \cap Pr) + P(B \cap Pr) + P(C \cap Pr) =$$

$$= P(A) \cdot P(Pr/A) + P(B) \cdot P(Pr/B) + P(C) \cdot P(Pr/C) =$$

$= 0{,}30 \cdot 0{,}30 + (0{,}7 - x) \cdot 0{,}25 + x \cdot 0{,}40 = 0{,}09 + 0{,}175 - 0{,}25x + 0{,}4x =$

$= 0{,}265 + 0{,}15x = 0{,}34;\ \ 0{,}15x = 0{,}34 - 0{,}265 = 0{,}075 \Rightarrow x = \frac{0{,}075}{0{,}15} = 0{,}5.$

$0{,}7 - 0{,}5 = 0{,}2.$

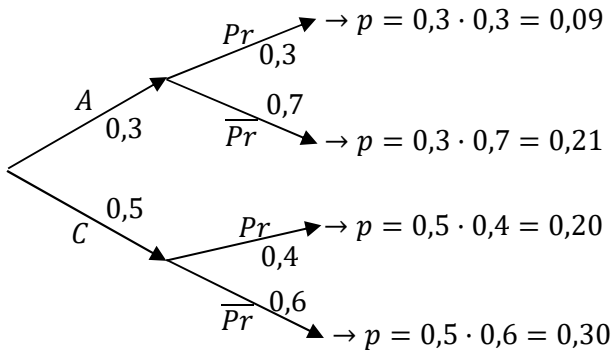
$\underline{El\ 50\ \%\ usa\ teléfonos\ de\ 5\ pulgadas\ y\ el\ 20\ \%\ de\ 4{,}7\ pulgadas.}$

$b)$

$$P = P(C/Pr) = \frac{P(C \cap Pr)}{P(Pr)} = \frac{P(C) \cdot P(Pr/C)}{P(Pr)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}40}{0{,}34} = \frac{0{,}20}{0{,}34} = \underline{0{,}5882}.$$

$c)$

Sabiendo que la pantalla no es de 4,7 pulgadas (B), el diagrama del árbol resultante sería el siguiente, excluyendo los teléfonos de 4,7 pulgadas de pantalla:



$$P = P(C/Pr) = \frac{P(C \cap Pr)}{P(Pr)} = \frac{P(C) \cdot P(Pr/C)}{P(A) \cdot P(Pr/A) + P(C) \cdot P(Pr/C)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}4}{0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}5 \cdot 0{,}4} =$$

$$= \frac{0{,}20}{0{,}09 + 0{,}20} = \frac{0{,}20}{0{,}29} = \underline{0{,}6897}.$$

****