PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Se han de contestar tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen. Todas las respuestas han de estar debidamente razonadas.

1º) Una agencia inmobiliaria tiene tres locales en alquiler, por los que ha cobrado en total 1.650 euros en este mes. La agencia ha pagado al propietario del primer local el 95 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; al propietario del segundo local, el 90 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler; y al propietario del tercer local, el 80 % de la cantidad que ha cobrado por su alquiler. Tras estos tres pagos, a la agencia le han quedado 132 euros de ganancia. Se sabe también que el alquiler que se cobra por el primer local es el doble de la suma de lo que se cobra por el alquiler de los otros dos locales juntos. ¿Cuántos euros cobra la agencia por cada uno de los tres locales que tiene en alquiler?

Sean x, y, z lo que cobra la agencia por los locales primero, segundo y tercero, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1.650 \\ 0{,}95x+0{,}90y+0{,}80z=1.650-132 \\ x=2\cdot(y+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=1.650 \\ 19x+18y+16z=20\cdot 1.518 \\ x=2y+2z \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1.650 \\ 19x+18y+16z=30.360 \\ x=2y+2z \end{array}\right\}.$$ Resolviendo por sustitución:

$$\left.\begin{array}{r} (2y+2z)+y+z=1.650 \\ 19\cdot(2y+2z)+18y+16z=30.360 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2y+2z+y+z=1.650 \\ 38y+38z+18y+16z=30.360 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y+3z=1.650 \\ 56y+54z=30.360 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y+z=550 \\ 28y+27z=15.180 \end{array}\right\} \Rightarrow z=550-y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 28y+27\cdot(550-y)=15.180;\ \ 28y+14.850-27y=15.180 \Rightarrow y=330.$$

$$z=550-y=550-330 \Rightarrow z=220.$$

$$x=2y+2z=2\cdot 330+2\cdot 220=660+440 \Rightarrow x=1.100.$$

$$\underline{La\ agencia\ cobra\ 1.100, 330\ y\ 220\ euros\ por\ cada\ local, respectivamente.}$$

****

2º) Una empresa apícola vende dos tipos de cajas con tres variedades de miel cada una: miel de romero, miel de azahar y miel multifloral. La caja de tipo A contiene 2 tarros de miel de romero, 2 de azahar y 1 de multifloral. La caja de tipo B contiene 1 tarro de miel de romero, 2 de azahar y 2 de multifloral. Cada día la empresa dispone de 280 tarros de miel de romero, 300 de miel de azahar y 250 de miel multifloral. Con cada caja de tipo A obtiene un beneficio de 7 euros y con cada caja de tipo B obtiene un beneficio de 5 euros.

$a)$ ¿Cuántas cajas de cada tipo debe comercializar para obtener un beneficio máximo?

$b)$ ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

$a)$

Sean x e y el número de cajas de los tipos A y B que comercializa la empresa apícola, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 2x+y\le 280 \\ 2x+2y\le 300 \\ x+2y\le 250 \\ x\ge 0; y\ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y\le 280 \\ x+y\le 150 \\ x+2y\le 250 \\ x\ge 0; y\ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 2x+y\le 280 \Rightarrow y\le 280-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	140
y	280	0

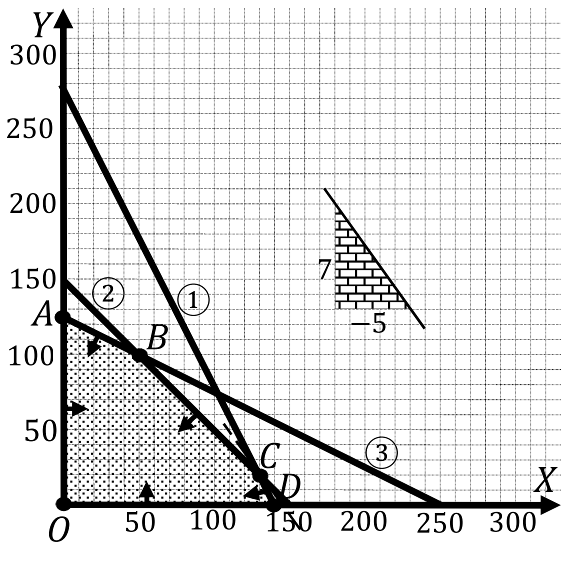
② $\Rightarrow x+y\le 150 \Rightarrow y\le 150-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	150
y	150	0

③ $\Rightarrow x+2y\le 250 \Rightarrow y\le \frac{250-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	250	50
y	0	100

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=250 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,125).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=150 \\ x+2y=250 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} -x-y=-150 \\ x+2y=250 \end{array}\right\} \Rightarrow y=100;\ \ x=50 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(50,100).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=280 \\ x+y=150 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=280 \\ -x-y=-150 \end{array}\right\} \Rightarrow x=130;\ \ y=20 \Rightarrow C(130,20).$

$D \Rightarrow \left. \begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 280 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 140 \Rightarrow D(140, 0).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 7x + 5y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 125) = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 125 = 0 + 625 = 625.$

$B \Rightarrow f(50, 100) = 7 \cdot 50 + 5 \cdot 100 = 350 + 500 = 850.$

$C \Rightarrow f(130, 20) = 7 \cdot 130 + 5 \cdot 20 = 910 + 100 = 1.010.$

$D \Rightarrow f(140, 0) = 7 \cdot 140 + 5 \cdot 0 = 980 + 0 = 980.$

El máximo se produce en el punto $C(130, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 7x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$

$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ comercializando\ 130\ cajas\ A\ y\ 20\ B.}$

$b)$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.010\ euros.}$$

****

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}$, se pide:

$a)$ Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$b)$ Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$d)$ Los máximos y mínimos locales, si existen.

$e)$ La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

$a)$

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x+1)^2=0;\ \ x+1=0;\ \ x=-1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=0;\ \ x^2+x-2=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=$$

$$=\frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \rightarrow \underline{A(-2,0)} \\ x_2=1 \rightarrow \underline{B(1,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+0-2}{(0+1)^2}=\frac{-2}{1}=-2 \Rightarrow \underline{C(0,-2)}.$$

$b)$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-2}{(x+1)^2}=1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ y=1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$(x+1)^2=0;\ \ x=-1 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x=-1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

$$\underline{No\ tiene\ asíntotas\ oblicuas\ por\ ser\ incompatibles\ con\ las\ horizontales.}$$

$c)$

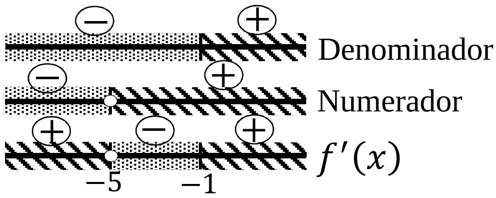
Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x+1)^2-(x^2+x-2)\cdot[2\cdot(x+1)\cdot 1]}{(x+1)^4} = \frac{(2x+1)\cdot(x+1)-2\cdot(x^2+x-2)}{(x+1)^3} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+x+1-2x^2-2x+4}{(x+1)^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+5}{(x+1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x+5}{(x+1)^3} = 0;\ x+5 = 0 \Rightarrow x = -5.$$

De la observación de la figura adjunta se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:



$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-5, -1).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -5) \cup (-1, +\infty).}$$

$d)$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = \frac{1\cdot(x+1)^3-(x+5)\cdot[3\cdot(x+1)^2\cdot 1]}{(x+1)^6} = \frac{(x+1)-3(x+5)}{(x+1)^4} = \frac{x+1-3x-15}{(x+1)^4} = \frac{-2x-14}{(x+1)^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{-2\cdot(x+7)}{(x+1)^4}.$$

$$f''(-5) = \frac{-2\cdot(-5+7)}{(-5+1)^4} = \frac{-4}{256} < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -5.$$

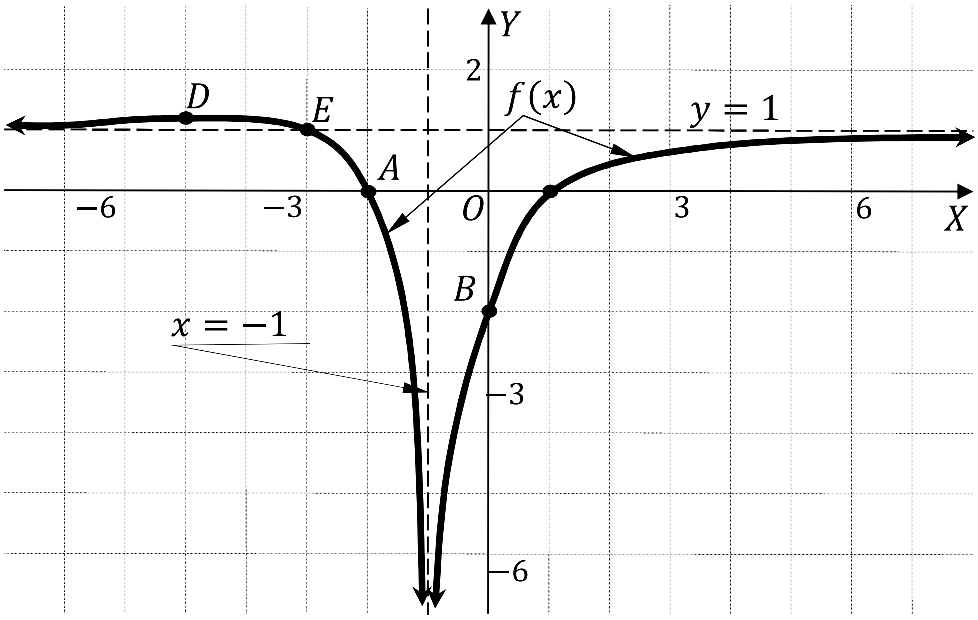
$$f(-5) = \frac{(-5)^2+(-5)-2}{(-5+1)^2} = \frac{25-5-2}{16} = \frac{18}{16} = \frac{9}{8} \Rightarrow \underline{Máximo: D\left(-5, \frac{9}{8}\right).}$$

$e)$

Para la representación gráfica conviene determinar el punto de corte de la función con la asíntota horizontal, que tiene como abscisa la solución de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = 1 \Rightarrow \frac{x^2+x-2}{(x+1)^2} = 1;\ \ x^2+x-2 = x^2+2x+1;\ \ x = -3 \Rightarrow E(-3, 1).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



****

4º) En una empresa se ha comprobado que sus beneficios están relacionados con su inversión en publicidad según la función $B(x) = 50.000 + 40x - \left(\frac{x}{10}\right)^2$, donde x es la inversión en publicidad $(x \geq 0)$ y $B(x)$ es el beneficio obtenido, ambos en euros.

a) Calcula la cantidad invertida en publicidad que produce un beneficio máximo. ¿Cuál es dicho beneficio máximo?

b) Calcula los intervalos para la inversión en publicidad en los que los beneficios crecen o decrecen a medida que se invierte en publicidad.

c) ¿Existe un valor para la inversión en publicidad a partir del cual los beneficios obtenidos serían menores que si no se invirtiera nada en publicidad? En caso afirmativo, determínalo.

----

a)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera derivada.

$$B'(x) = 40 - 2 \cdot \left(\frac{x}{10}\right) \cdot \frac{1}{10} = 40 - \frac{1}{50}x.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow 40 - \frac{1}{50}x = 0;\ 2.000 - x = 0 \Rightarrow x = 2.000.$$

$$B''(x) = \frac{1}{50} - < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2.000.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ invirtiendo\ 2.000\ euros\ en\ publicidad}.$$

$$B(2.000) = 50.000 + 40 \cdot 2.000 - \left(\frac{2.000}{10}\right)^2 = 50.000 + 80.000 - 40.000 =$$

$$= 130.000 - 40.000 \Rightarrow B(2.000) = 90.000.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ esde\ 90.000\ euros}.$$

b)

Por ser la función de beneficios una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, y tener su máximo para $x = 2.000$,

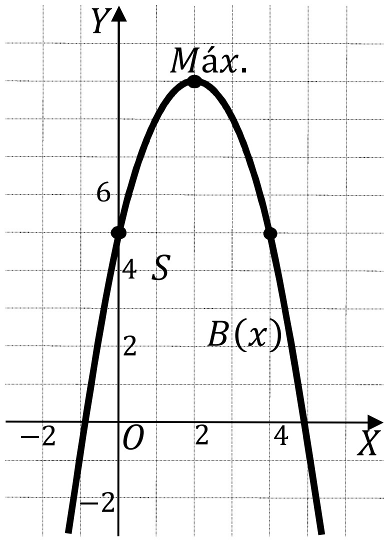
Teniendo en cuenta que $D(B) \Rightarrow [0, +\infty)\ y\ d$e lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$B'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (0, 2.000)}.$$

$$B'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (2.000, +\infty)}.$$

$c)$

Cuando no se invierte en publicidad $(x = 0)$ el beneficio es $B(0) = 50.000$ euros. Teniendo en cuanta la simetría de la función beneficios (parábola) con respecto a la recta vertical que contiene a su vértice (máximo), que es $x = 2.000$, existe el valor $x = 4.000$ para el cual el beneficio es el mismo que cuando no se invierte nada en publicidad.



Se ilustra el razonamiento con la gráfica adjunta, donde las abscisas (inversión en publicidad) es expresan en miles de euros y las ordenadas (beneficio) se expresan en decenas de miles de euros.

$\underline{Con\ 4.000\ euros\ en\ publicidad\ se\ obtiene\ igual\ beneficio\ que\ no\ invirtiendo.}$

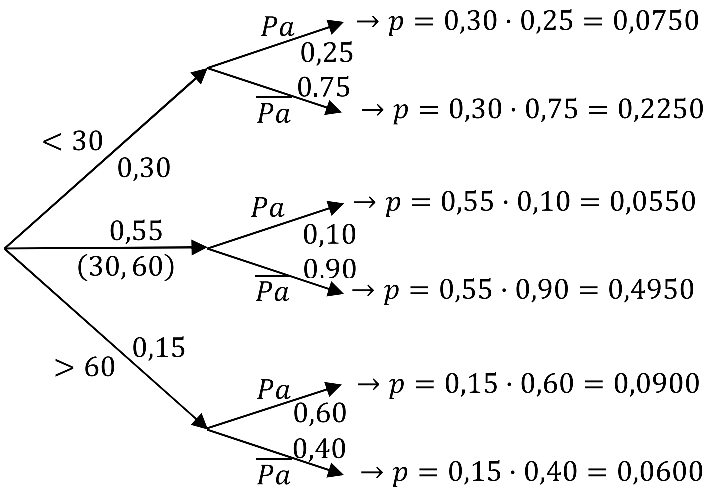
****

5º) Entre los clientes de una compañía de seguros de automóviles, un 30 % tiene menos de 30 años, un 55 % tiene entre 30 y 60 años, y el 15 % restante tiene más de 60 años. Se sabe que, entre los clientes de menos de 30 años, 3 de cada 4 no presentaron parte de accidente el año pasado; entre los clientes que tienen entre 30 y 60 años, 9 de cada 10 no presentaron parte de accidente el año pasado; y entre los clientes de más de 60 años, 2 de cada 5 no presentaron parte de accidente el año pasado. Seleccionamos al azar un cliente de la compañía:

a) Llamemos A al suceso “el cliente seleccionado tiene más de 60 años” y llamemos B al suceso “el cliente seleccionado no presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(A \cup B)$.

b) Llamemos C al suceso “el cliente seleccionado tiene 30 años o más” y D al suceso “el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado”. Calcula $P(C \cap D)$.

c) Si sabemos que el cliente seleccionado presentó parte de accidente el año pasado, calcula la probabilidad de que tenga 60 años o menos.



$$P(B) = P(\overline{Pa}) = P(< 30 \cap \overline{Pa}) + P[(30, 60) \cap \overline{Pa}] + P(> 60 \cap \overline{Pa}) =$$

$$= P(< 30) \cdot P(\overline{Pa}/< 30) + P(30, 60) \cdot P[\overline{Pa}/(30, 60)] +$$

$$+P(> 60) \cdot P(\overline{Pa}/> 60) = 0{,}30 \cdot 0{,}75 + 0{,}55 \cdot 0{,}90 + 0{,}15 \cdot 0{,}40 =$$

$$= 0{,}2250 + 0{,}4950 + 0{,}0600 = 0{,}7800.$$

$$P(A \cap B) = P(> 60 \cap \overline{Pa}) \cdot P(> 60) \cdot P(\overline{Pa}/> 60) = 0{,}15 \cdot 0{,}40 = 0{,}0600.$$

a)

$Datos$: $P(A) = 0{,}15$; $P(B) = 0{,}78$; $P(A \cap B) = 0{,}06$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}15 + 0{,}78 - 0{,}06 = \underline{0{,}87}$$

$b)$

La probabilidad pedida, $P(C \cap D)$, es equivalente a la suma de las probabilidades de tener entre 30 y 60 años y presentar parte y tener más de 60 años y presentar parte, es decir:

$$P(C \cap D) = P[(30,60) \cap Pa] + P(> 60 \cap Pa) =$$

$$= P(30,60) \cdot P[Pa/(30,60)] + P(> 60) \cdot P(Pa/> 60) =$$

$$= 0{,}55 \cdot 0{,}10 + 0{,}15 \cdot 0{,}60 = 0{,}055 + 0{,}090 \Rightarrow \underline{P(C \cap D) = 0{,}145}.$$

$c)$

$$P = P(\leq 60/Pa) = \frac{P(<30 \cap Pa)}{P(Pa)} + \frac{P[(30,60) \cap Pa]}{P(Pa)} = \frac{P(<30 \cap Pa) + P[(30,60) \cap Pa]}{P(Pa)} =$$

$$= \frac{P(<30) \cdot P(Pa/<30) + P(30,60) \cdot P[Pa/(30,60)]}{1 - P(\overline{Pa})} = \frac{0{,}30 \cdot 0{,}25 + 0{,}55 \cdot 0{,}10}{1 - 0{,}78} = \frac{0{,}075 + 0{,}055}{0{,}22} = \frac{0{,}13}{0{,}22} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(\leq 60/Pa) = 0{,}5909}.$$

Otra forma de resolver este ejercicio es mediante una tabla de contingencia como la siguiente:

	$x \leq 30$	$30 < x < 60$	$x \geq 60$	$Total$
$No\ presenta\ parte$	$0{,}75 \cdot 30 = 22{,}5$	$0{,}9 \cdot 55 = 49{,}5$	$0{,}4 \cdot 15 = 6$	78
$Presenta\ parte$	$0{,}25 \cdot 30 = 7{,}5$	$0{,}1 \cdot 55 = 5{,}5$	$0{,}6 \cdot 15 = 9$	22
$Total$	30	55	15	100

$a)$

$$P = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{15}{100} + \frac{78}{100} - \frac{6}{100} = \frac{87}{100} = \underline{0{,}87}.$$

$b)$

$$P = P(C \cap D) = \frac{5{,}5}{100} + \frac{9}{100} = \frac{14{,}5}{100} = \underline{0{,}145}.$$

$c)$

$$P = P(< 60/Pa) = \frac{P(<60 \cap Pa)}{P(Pa)} = \frac{7{,}5 + 5{,}5}{22} = \frac{13}{22} = \underline{0{,}5909}.$$

****

6º) En un juego se lanzan dos monedas equilibradas y un dado de seis caras equilibrado. Un jugador gana si obtiene dos caras y un número par en el dado, o bien, si obtiene exactamente una cara y un número mayor o igual que cinco en el dado.

a) Calcula la probabilidad de que el jugador gane.

b) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera dos caras al lanzar las monedas?

c) Si se sabe que ha ganado, ¿cuál es la probabilidad de que obtuviera un 5 al lanzar el dado?

d) Llamemos A al suceso "el jugador no gana" y llamemos B al suceso "el jugador obtiene un 6 al lanzar el dado". ¿Son compatibles los sucesos A y B?

El espacio muestral es el siguiente:

C C 1	$C\ C\ 2$	$C\ C\ 3$	$C\ C\ 4$	$C\ C\ 5$	$C\ C\ 6$
$C+1$	$C+2$	$C+3$	$C+4$	$C+5$	$C+6$
$+C\ 1$	$+C\ 2$	$+C\ 3$	$+C\ 4$	$+C\ 5$	$+C\ 6$
$++1$	$++2$	$++3$	$++4$	$++5$	$++6$

a)

Los casos favorables aparecen sombreados:

C C 1	$\boldsymbol{C\ C\ 2}$	$C\ C\ 3$	$\boldsymbol{C\ C\ 4}$	$C\ C\ 5$	$\boldsymbol{C\ C\ 6}$
$C+1$	$C+2$	$C+3$	$C+4$	$\boldsymbol{C+5}$	$\boldsymbol{C+6}$
$+C\ 1$	$+C\ 2$	$+C\ 3$	$+C\ 4$	$\boldsymbol{+C\ 5}$	$\boldsymbol{+C\ 6}$
$++1$	$++2$	$++3$	$++4$	$++5$	$++6$

$$p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{7}{24} = \underline{0{,}2917}.$$

b)

$$p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{\{\boldsymbol{C\ C\ 2};\ \boldsymbol{C\ C\ 4};\ \boldsymbol{C\ C\ 6}\}}{\{\boldsymbol{C\ C\ 2};\ \boldsymbol{C\ C\ 4};\ \boldsymbol{C\ C\ 6};\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{5};\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{6};\ +\boldsymbol{C\ 5};\ +\boldsymbol{C\ 6}\}} = \frac{3}{7} = \underline{0{,}4286}.$$

c)

$$p = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{\{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{5};+\boldsymbol{C\ 5}\}}{\{\boldsymbol{C\ C\ 2};\ \boldsymbol{C\ C\ 4};\ \boldsymbol{C\ C\ 6};\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{5};\ \boldsymbol{C}+\boldsymbol{6};\ +\boldsymbol{C\ 5};\ +\boldsymbol{C\ 6}\}} = \frac{2}{7} = \underline{0{,}2857}.$$

d)

Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$P(A) = P(\overline{G}) = 1 - P(G) = 1 - \frac{7}{24} = \frac{17}{24}.$$

$$P(B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{\{\boldsymbol{C\ C\ 6};\ \boldsymbol{C+6}; +\boldsymbol{C\ 6}; ++\boldsymbol{6}\}}{E} = \frac{4}{24}.$$

$$P(A \cap B) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{\{++\ \boldsymbol{6}\}}{Casos\ que\ no\ gana \to 17} = \frac{1}{17}.$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow \frac{1}{17} \neq \frac{17}{24} \cdot \frac{4}{24} \Rightarrow \underline{A\ y\ B\ no\ son\ independientes.}$$

****