

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE VALENCIA****JUNIO – 2006**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación se proponen, teniéndose que hacer 2 de los 3 primeros ejercicios del repertorio elegido.

Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido puntuará 2'5 puntos como máximo.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas.

REPERTORIO A

1º) Dado el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$$
, se pide:

- a) Determinar razonadamente el valor de α para el cual el sistema es compatible.
- b) Para el valor obtenido de α en el apartado a), calcular el conjunto de soluciones del sistema.
- c) Explicar la posición relativa de los tres planos definidos por cada una de las tres ecuaciones del sistema, en función de los valores de α .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz de coeficientes es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 42 + 12 - 22 + 18 - 22 - 28 = 72 - 72 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Rango } M = 2}}$$

Para que el sistema sea compatible determinado es necesario, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, que el rango de la matriz ampliada sea también dos:

$$\text{Rango de } M' \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & \alpha \\ 2 & 6 & -11 & 2 \\ 1 & -2 & 7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4\alpha + 4 - 6\alpha + 4 - 4 = 10 - 10\alpha = 0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \begin{vmatrix} 1 & -3 & \alpha \\ 2 & -11 & 2 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -11 + 14\alpha - 6 + 11\alpha - 14 + 6 = 25\alpha - 25 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \begin{vmatrix} 2 & -3 & \alpha \\ 6 & -11 & 2 \\ -2 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -22 + 42\alpha + 12 - 22\alpha - 28 + 18 = 20\alpha - 20 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\alpha = 1}$$

Para $\alpha = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible Indeterminado}$

Para $\alpha = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$. Despreciando una de las ecuaciones (segunda) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

nes (segunda) y parametrizando una de las incógnitas (z), resulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 1 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{array} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 2y = 1 + 3\lambda \\ x - 2y = 1 - 7\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 2 - 4\lambda \Rightarrow \underline{x = 1 - 2\lambda}$$

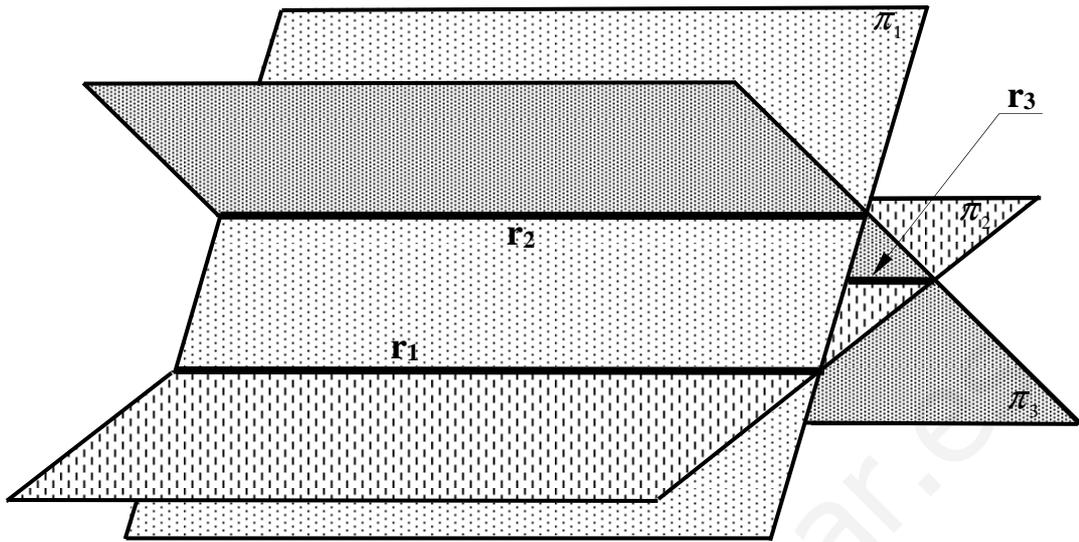
$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 1 + 3\lambda \\ -x + 2y = -1 + 7\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 4y = 10\lambda \Rightarrow \underline{y = \frac{5}{2}\lambda}$$

$$\underline{\underline{\text{Solución: } \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = \frac{5}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \forall \lambda \in \mathbb{R}}}$$

c)

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado, lo que significa que los tres planos tienen puntos en común. Como el rango de ambas matrices es dos y el número de incógnitas es tres, el grado de libertad es uno, lo cual significa que los tres planos tienen una recta en común sin coincidir ninguno de los planos.

Para $\alpha \neq 1$ el sistema es incompatible, lo que significa que los tres planos no tienen puntos en común. Se trata de tres planos que se cortan dos a dos determinando tres rectas paralelas, como se indica en el gráfico siguiente.



www.yoquieroaprobar.com

2º) En el espacio se consideran la recta r intersección de los planos de ecuaciones implícitas $\pi_1 \equiv x + y - z = 5$ y $\pi_2 \equiv 2x + y - 2z = 2$ y la recta s que pasa por los puntos $A(3, 10, 5)$ y $B(5, 12, 6)$, se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s.

b) Calcular el punto H intersección de las rectas r y s y el ángulo que forman r y s.

c) Calcular los puntos M y N de la recta r para los cuales el área de cada uno de los triángulos de vértices ABM y ABN es de 3 unidades de área.

a)

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ 2x + y - 2z = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y = 5 + \lambda \\ 2x + y = 2 + 2\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -x - y = -5 - \lambda \\ 2x + y = 2 + 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{x = -3 + \lambda}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 2y = 10 + 2\lambda \\ -2x - y = -2 - 2\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{y = 8} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = 8 \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de s es $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5, 12, 6) - (3, 10, 5) = (2, 2, 1)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \underline{\underline{\begin{cases} x = 5 + 2\mu \\ y = 12 + 2\mu \\ z = 6 + \mu \end{cases}}}$.

b)

Un punto genérico de cada una de las rectas son: $\begin{cases} P \in r \equiv (-3 + \lambda, 8, \lambda) \\ Q \in s \equiv (5 + 2\mu, 12 + 2\mu, 6 + \mu) \end{cases}$

El punto de intersección es tal que $H \equiv P \equiv Q \Rightarrow \begin{cases} -3 + \lambda = 5 + 2\mu \\ 8 = 12 + 2\mu \\ \lambda = 6 + \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = -2 \\ \lambda = 4 \end{cases} \Rightarrow$

H(1, 8, 4)

El ángulo que forman las rectas r y s es el mismo que forman sus vectores directores. Un vector director de s es $\vec{u} = (2, 2, 1)$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(2, 2, 1) \cdot (1, 0, 1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} =$$

$$= \frac{2 + 0 + 1}{\sqrt{4 + 4 + 1} \cdot \sqrt{1 + 0 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}}$$

c)

Considerando como base de los triángulos el segmento \overline{AB} y sabiendo que el área de los triángulos es 3, las alturas de los triángulos serían:

$$\overline{AB} = \left| \vec{v} \right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3u = \overline{AB}.$$

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{\overline{PQ} \cdot h}{2} = \frac{3 \cdot h}{2} \Rightarrow \underline{h = 2u}.$$

Los puntos M y N de la recta r son los que distan dos unidades de la recta s. Los puntos M y N, por pertenecer a r, tienen por coordenadas $P(-3 + \lambda, 8, \lambda)$.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(P, s) = \frac{|\overline{AP} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$,

siendo A(3, 10, 5) un punto cualquiera de la recta s y \vec{u} un vector director de la recta s.

$$\overline{AP} = P - A = (-3 + \lambda, 8, \lambda) - (3, 10, 5) = (\lambda - 6, -2, \lambda - 5).$$

$$d(P, s) = \frac{|\overline{AP} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|} = 2 = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda - 6 & -2 & \lambda - 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} \quad ;;$$

$$2 = \frac{|-2i + 2(\lambda - 5)j + 2(\lambda - 6)k + 4k - 2(\lambda - 5)i - (\lambda - 6)j|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \quad ;;$$

$$2 = \frac{|(-2 - 2\lambda + 10)i + (2\lambda - 10 - \lambda + 6)j + (2\lambda - 12 + 4)k|}{\sqrt{9}} \quad ;;$$

$$6 = |(8 - 2\lambda)i + (\lambda - 4)j + (2\lambda - 8)k| \quad ;; \quad 6 = \sqrt{(8 - 2\lambda)^2 + (\lambda - 4)^2 + (2\lambda - 8)^2} \quad ;;$$

$$36 = 64 - 32\lambda + 4\lambda^2 + \lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4\lambda^2 - 32\lambda + 64 \quad ;; \quad 36 = 9\lambda^2 - 72\lambda + 144 \quad ;;$$

$$9\lambda^2 - 72\lambda + 108 = 0 \quad ;; \quad \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0 \quad ;; \quad \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 6} \quad ;; \quad \underline{\lambda_2 = 2}$$

$$P(-3 + \lambda, 8, \lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 6 \rightarrow \underline{\underline{M(3, 8, 6)}} \\ \lambda = 2 \rightarrow \underline{\underline{N(-1, 8, 2)}} \end{cases}$$

3º) a) Dibuja razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \leq x \leq 4$.

b) Obtén razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la siguiente función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$.

c) Calcula el área plana limitada por la función $f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$.

a)

La función $g(x)$ es polinómica por lo cual su dominio es \mathbb{R} . Se trata de una parábola simétrica con respecto al eje de ordenadas por ser $g(x) = g(-x)$.

Los cortes con los ejes son los siguientes:

$$\text{Eje } OX \Rightarrow y = 0 \quad ; \quad x^2 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \\ x_2 = -2 \rightarrow \underline{B(-2, 0)} \end{cases}$$

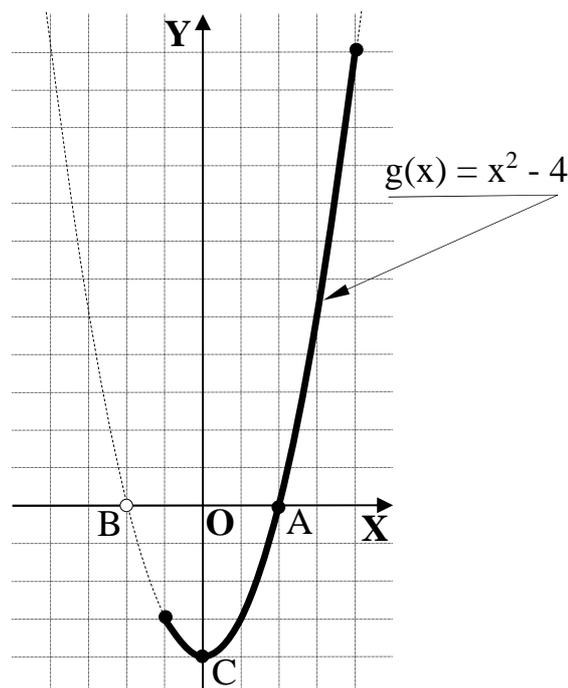
$$\text{Eje } OY \Rightarrow x = 0 \quad ; \quad y = -4 \rightarrow \underline{C(0, -4)}$$

La función $g(x)$ es convexa (\cup) y su punto mínimo es el siguiente:

$$g'(x) = 2x \quad ; \quad g'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \quad ; \quad x = 0$$

$$g''(x) = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = 0 \Rightarrow \underline{\text{Mín.: } C(0, -4)}$$

Teniendo en cuenta que $g(-1) = -3$ y $g(4) = 12$, la representación gráfica de la función $g(x)$ es la indicada en la siguiente figura.



b)

Con objeto de facilitar la representación, la función $f(x) = |x^2 - 4|$ se puede redefinir de la forma $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases}$.

El dominio de $f(x)$ es $[-1, 4]$ y, teniendo en cuenta que $f(4) = |4^2 - 4| = 12$, el recorrido es $[0, 12)$.

Como quiera que la función $f(x) \geq 0, \forall x \in R$, los mínimos absolutos son los puntos de la función que pertenecen al eje de abscisas: $f(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow \notin D(f) \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 0)} \end{cases}$.

El máximo absoluto de la función se produce para $x = 4$ y es $Q(4, 12)$.

Existe un máximo relativo para $x = 0$, por ser:

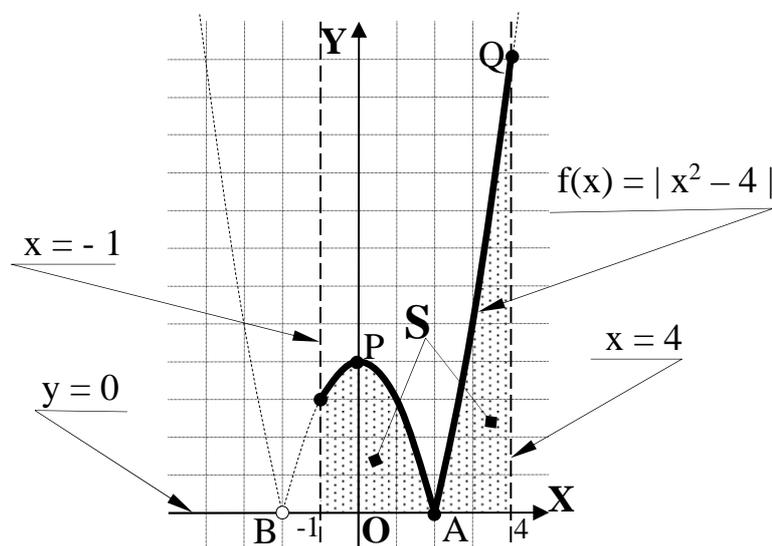
$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$$

La función tiene un máximo o un mínimo relativo en el intervalo $-2 \leq x \leq 2$.

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \end{cases} \Rightarrow f''(x) < 0 \text{ en } -2 \leq x \leq 2 \Rightarrow \underline{\text{Máximo relativo}}$$

$$f(0) = |0^2 - 4| = 4 \Rightarrow \underline{\text{Máx. relativo: } P(0, 4)}$$

La representación gráfica de la función es la de la figura siguiente:



c)

Teniendo en cuenta lo anterior y de la observación de la figura se deduce que la superficie pedida es la siguiente:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 (-x^2 + 4) \cdot dx + \int_2^4 (x^2 - 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-1}^2 + \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_2^4 = \\ &= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2 \right) - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1) \right] + \left(\frac{4^3}{3} - 4 \cdot 4 \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 4 \cdot 2 \right) = \\ &= -\frac{8}{3} + 8 - \frac{1}{3} + 4 + \frac{64}{3} - 16 - \frac{8}{3} + 8 = 4 + \frac{47}{3} = \underline{\underline{\frac{59}{3} u^2 = S}} \end{aligned}$$

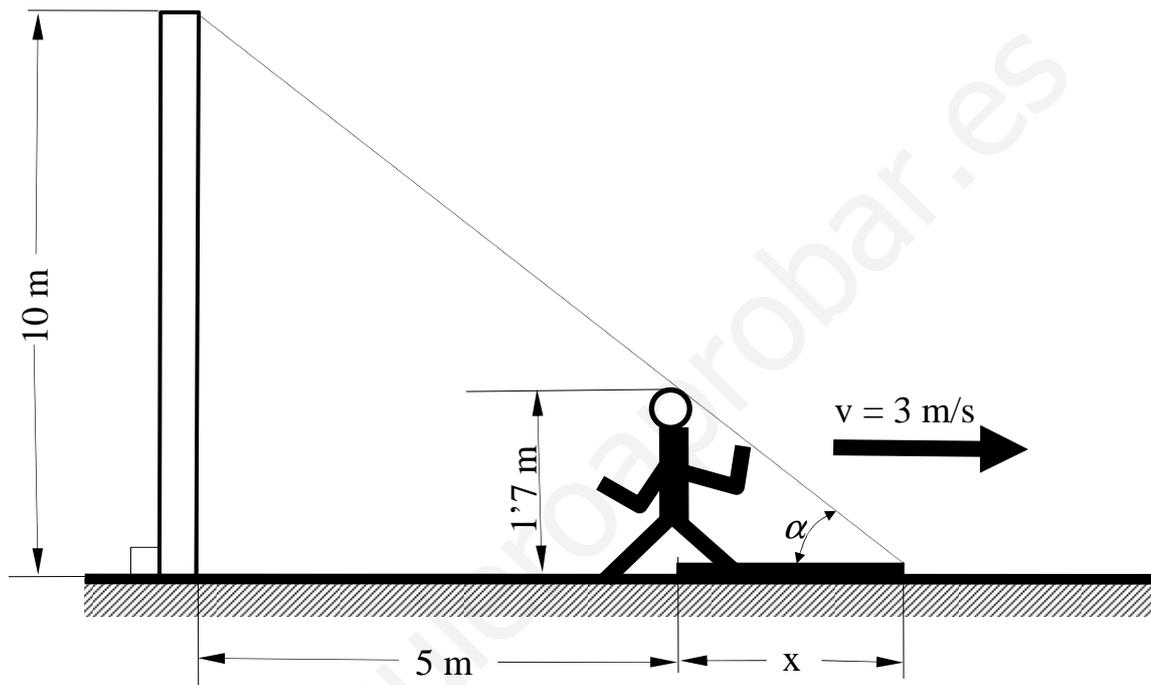
www.yoquieroaprobar.es

4º) Una persona camina a la velocidad constante de 3 m/s y se aleja horizontalmente en línea recta desde la base de un farol de foco luminoso del que se encuentra a 10 m de altura. Sabiendo que la persona tiene 1'70 m, calcula:

a) La longitud de la sombra cuando la persona se encuentra a 5 m de la base del farol.

b) La velocidad de crecimiento de la sombra a los t segundos de empezar a caminar.

a)



$$\operatorname{tag} \alpha = \frac{10}{5+x} = \frac{1'7}{x} \Rightarrow 10x = 8'5 + 1'7x \ ; \ ; \ ; \ 10x - 1'7x = 8'5 \ ; \ ; \ ; \ 8'3x = 8'5 \ ; \ ; \ ; \ x = \frac{8'5}{8'3} = \underline{1'02} = x$$

La longitud de la sombra es de 1'02 metros.

b)

Siendo la velocidad de la persona de 3 m/s, al cabo de un tiempo de t segundos, se encuentra a una distancia del foco de 3t metros y la longitud de la sombra x, en el

instante t es: $\operatorname{tag} \alpha = \frac{10}{3t} = \frac{1'7}{x} \Rightarrow 10x = 5'1t \ ; \ ; \ ; \ x = 0'51t.$

Como la velocidad instantánea es la derivada del espacio con respecto al tiempo, será:

$$\underline{\underline{v = d'(t) = 0'51 \text{ m/s}}}$$

REPERTORIO B

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Probar que la matriz T tiene matriz inversa y calcular dicha matriz inversa.

b) Dada la ecuación con matriz incógnita B, $A = T^{-1}BT$, calcular el determinante de B.

c) Obtener los elementos de la matriz B considerada en el apartado b).

a)

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|T| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -6 - 2 - 4 + 3 + 4 + 4 = -12 + 11 = -1 \neq 0$$

T es inversible, como queríamos probar.

$$|T| = -1 \;; \; T^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \;; \; Adj(A^t) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el determinante de un producto de matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices, también se podía hacer el ejercicio de ésta forma:

$$B = T \cdot A \cdot T^{-1} \Rightarrow |B| = |T| \cdot |A| \cdot |T^{-1}| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-6 - 2 - 4 + 3 + 4 + 4) \cdot (-6 - 4 - 4 + 2 + 8 + 6) \cdot (-2 + 2 - 1) =$$

$$= (11 - 12) \cdot (16 - 14) \cdot (-1) = -1 \cdot 2 \cdot (-1) = 2 = \underline{\underline{|B|}}$$

c)

$A = T^{-1} \cdot B \cdot T \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por T y por la derecha por T^{-1} , resulta:

$$T \cdot A \cdot T^{-1} = T \cdot T^{-1} \cdot B \cdot T \cdot T^{-1} = I \cdot B \cdot I = \underline{\underline{B = T \cdot A \cdot T^{-1}}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4-4+2 & 4-4+4 & 2-4+3 \\ -2+3-2 & -2+3-4 & -1+3-3 \\ 2-2+2 & 2-2+4 & 1-2+3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2+0-1 & 4-4+0 & 2-4+2 \\ -1-0+1 & -2+3-0 & -1+3-2 \\ 2+0-2 & 4-4+0 & 2-4+4 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = B}}$$

2º) Dados los puntos A(4, -4, 9), B(2, 0, 5), C(4, 2, 6), L(1, 1, 4), M(0, 2, 3) y N(3, 0, 5), se pide:

a) Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A y B y el área S del triángulo de vértices ABC.

b) Calcular la ecuación implícita del plano π que pasa por los puntos A, B y C y del plano π' que pasa por los puntos L, M y N.

c) Calcular unas ecuaciones paramétricas de la recta r intersección de los planos π y π' y el ángulo α que determinan los planos π y π' .

a)

El punto medio del segmento de extremos A(4, -4, 9), B(2, 0, 5) es M(3, -2, 7).

La distancia d del punto C(4, 2, 6) al punto M es la siguiente:

$$d = \overline{MC} = \sqrt{(4-3)^2 + (2+2)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = \underline{\underline{3\sqrt{2} \text{ u} = d}}$$

Para hallar el área del triángulo ABC consideramos como base, por ejemplo, el segmento \overline{AB} .

La recta r que contiene al segmento \overline{AB} tiene el siguiente vector director:
 $\vec{v} = \overline{AB} = B - A = (2, 0, 5) - (4, -4, 9) = (-2, 4, -4)$.

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = \sqrt{36} = 6 \text{ u} = \overline{AB}.$$

La altura del triángulo es la distancia del punto C a la recta r.

La distancia de un punto a una recta viene dada por la fórmula $d(C, r) = \frac{|\overline{AC} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$,

siendo A(4, -4, 9) un punto cualquiera de la recta r y \vec{v} un vector director de la recta r.

$$\overline{AC} = C - A = (4, 2, 6) - (4, -4, 9) = (0, 6, -3).$$

$$h = d(C, r) = \frac{|\overline{AC} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \frac{|-24i + 6j + 12k + 12i|}{\sqrt{4+16+16}} =$$

$$= \frac{|-12i + 6j + 12k|}{\sqrt{36}} = \frac{6 \cdot |-2i + j + 2k|}{6} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3 \underline{u = h}$$

$$S_{ABC} = \frac{\overline{AB} \cdot h}{2} = \frac{6 \cdot 3}{2} = \underline{\underline{9 u^2 = S_{ABC}}}$$

b)

Los puntos A(4, -4, 9), B(2, 0, 5) y C(4, 2, 6) determinan los siguientes vectores:

$$\vec{u} = \overline{AC} = (0, 6, -3) \text{ y } \vec{v} = \overline{AB} = (-2, 4, -4).$$

La expresión general del plano π es la siguiente:

$$\pi(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-4 & y+4 & z-9 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ; \quad -24(x-4) + 6(y+4) + 12(z-9) + 12(x-4) = 0 \quad ; ;$$

$$-12(x-4) + 6(y+4) + 12(z-9) = 0 \quad ; ; \quad -2(x-4) + (y+4) + 2(z-9) = 0 \quad ; ;$$

$$-2x + 8 + y + 4 + 2z - 18 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi \equiv 2x - y - 2z + 6 = 0}}$$

Los puntos L(1, 1, 4), M(0, 2, 3) y N(3, 0, 5) determinan los siguientes vectores:

$$\vec{w} = \overline{LM} = M - L = (0, 2, 3) - (1, 1, 4) = (-1, 1, -1) \text{ y}$$

$$\vec{z} = \overline{LN} = N - L = (3, 0, 5) - (1, 1, 4) = (2, -1, 1)$$

La expresión general del plano π' es la siguiente:

$$\pi'(L; \vec{w}, \vec{z}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-4 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad ; ;$$

$$(x-1) - 2(y-1) + (z-4) - 2(z-4) - (x-1) + (y-1) = 0 \quad ; ; \quad -(y-1) - (z-4) = 0 \quad ; ;$$

$$y - 1 + z - 4 = 0 \quad ; ; \quad \underline{\underline{\pi' \equiv y + z - 5 = 0}}$$

c)

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es $r \equiv \begin{cases} 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$.

Parametrizando $x = \lambda$ se tiene:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{x = \lambda} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y - 2z = -6 - 2\lambda \\ y + z = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -z = -1 - 2\lambda \quad ; ; \quad \underline{z = 1 + 2\lambda}$$

$$y = 5 - z = 5 - 1 - 2\lambda \quad ; ; \quad \underline{y = 4 - 2\lambda} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4 - 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}}}$$

El ángulo α que determinan los planos π y π' es el mismo que forman sus vectores normales, que son $\vec{n} = (2, -1, -2)$ y $\vec{n}' = (0, 1, 1)$, respectivamente.

Aplicando el producto escalar de dos vectores:

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{n}' &= |\vec{n}| \cdot |\vec{n}'| \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{n} \cdot \vec{n}'}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{(2, -1, -2) \cdot (0, 1, 1)}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \\ &= \frac{0 - 1 - 2}{\sqrt{4 + 1 + 4} \cdot \sqrt{0 + 1 + 1}} = \frac{-3}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 135^\circ}} \end{aligned}$$

3º) Dada la función $f(x) = Lx$ en el intervalo $[1, e]$, siendo $e = 2'718281 \dots$:

a) Razona que hay un punto P de la gráfica de $y = Lx$ en que la recta tangente a ésta es paralela a la recta que pasa por los puntos A(1, 0) y B(e, 1).

b) Obtén el punto P considerado en el apartado a).

c) Calcula la pendiente de la recta tangente a $y = Lx$ en el punto P hallado en b).

a)

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = Lx$ es continua y derivable en el intervalo considerado y que la pendiente de la recta tangente es la del vector determinado por los puntos A y B, $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (e-1, 1) \Rightarrow m = \frac{1}{e-1}$.

Sabiendo que la pendiente a una recta en un punto es igual que el valor de la derivada de la función en ese punto, es:

$$y = \frac{1}{x} \Rightarrow m = \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow \underline{\underline{x = e-1 \in [1, e]}}$$

b)

$$y_{(e-1)} = L(e-1) \Rightarrow \underline{\underline{P[e-1, L(e-1)]}}$$

c)

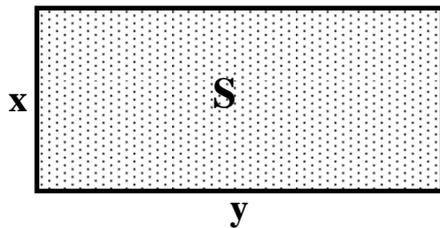
El valor de la pendiente es $\underline{\underline{m = \frac{1}{e-1}}}$.

4º) El coste del marco rectangular es de 12'5 euros por metro lineal de los lados verticales y de 8 euros por metro lineal de los lados horizontales.

a) Calcula razonadamente las dimensiones que ha de tener el marco de un cuadro de un metro cuadrado de superficie para que resulte lo más económico posible.

b) Calcular además el coste de este marco más económico posible considerado en a).

a)



$$S = x \cdot y = 1 \quad ; \quad y = \frac{1}{x}$$

$$\text{Coste} = C(x) = 2x \cdot 12'5 + 2y \cdot 8 = \underline{25x + 16y = C}$$

Sustituyendo el valor de y:

$$\text{Coste} = C(x) = 25x + \frac{16}{x} = \frac{25x^2 + 16}{x} = C(x).$$

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C'(x) = \frac{50x \cdot x - 1 \cdot (25x^2 + 16)}{x^2} = \frac{50x^2 - 25x^2 - 16}{x^2} = \frac{25x^2 - 16}{x^2} = C'(x)$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow 25x^2 - 16 = 0 \quad ; \quad x^2 = \frac{16}{25} \quad ; \quad x = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5} \quad (-\frac{4}{5} \text{ carece de sentido}) \quad ; \quad \underline{x = \frac{4}{5}}$$

Las dimensiones del cuadro deben ser de 80 cm de base por 125 cm de alto.

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$C''(x) = \frac{50x \cdot x^2 - 2x \cdot (25x^2 - 16)}{x^4} = \frac{50x^2 - 50x^2 + 32}{x^3} = \frac{32}{x^3} = C''(x)$$

$$C''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{16}{\left(\frac{4}{5}\right)^3} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo, c.q.j.}}}$$

b)

$$\text{El coste es: } \text{Coste} = 25x + 16y = 25 \cdot \frac{4}{5} + 16 \cdot \frac{5}{4} = 20 + 20 = \underline{\underline{40 \text{ euros} = \text{Coste}}}$$
