PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE VALENCIA

SEPTIEMBRE – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirán TRES bloque y se hará un problema de cada uno de ellos.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar debidamente justificados.

BLOQUE 1.- ÁLGEBRA LINEAL.

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} 6x+3y+2z=5 \\ 3x+4y+6z=3 \\ x+3y+2z=\alpha \end{cases}$, se pide:

a) Justificar que para cualquier valor del parámetro α, el sistema tiene solución única.

b) Hallar la solución del sistema en función del parámetro α.

c) Determinar el valor de α para que la solución (x, y, z) del sistema satisface la ecuación $x+y+z=1$.

----

a)

Para que el sistema tenga solución única es condición suficiente que el determinante de la matriz de coeficientes sea tres. Según el Teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema es compatible determinado cuando el rango de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales al número de incógnitas y, en este caso el número de incógnitas es tres y el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que tres, cualquiera que sea el valor del parámetro α.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$Rango\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 48+18+18-8-108-18=84-134=-50 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M=3}$$

$\underline{\underline{El\ \ sistema\ \ tiene\ \ solución\ \ única\ \ (es\ \ Compatible\ \ Deter\min ado),\ \ c.q.j.}}$

b)

Resolvemos aplicando la Regla de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}5&3&2\\3&4&6\\\alpha&3&2\end{vmatrix}}{-50}=\frac{\begin{vmatrix}5&3&1\\3&4&3\\\alpha&3&1\end{vmatrix}}{-25}=\frac{20+9+9\alpha-4\alpha-45-9}{-25}=\frac{5\alpha-25}{-25}=\underline{\underline{\frac{5-\alpha}{5}=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}6&5&2\\3&3&6\\1&\alpha&2\end{vmatrix}}{-50}=\frac{\begin{vmatrix}6&5&1\\3&3&3\\1&\alpha&1\end{vmatrix}}{-25}=\frac{18+3\alpha+15-3-18\alpha-15}{-25}=\frac{-15\alpha+15}{-25}=\underline{\underline{\frac{3\alpha-3}{5}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}6&3&5\\3&4&3\\1&3&\alpha\end{vmatrix}}{-50}=\frac{24\alpha+45+9-20-54-9\alpha}{-50}=\frac{15\alpha-20}{-50}=\underline{\underline{\frac{4-3\alpha}{10}=z}}$$

c)

Para que la solución cumpla que $x+y+z=1$ tiene que ser:

$$\frac{5-\alpha}{5}+\frac{3\alpha-3}{5}+\frac{4-3\alpha}{10}=1\ \ ;;\ \ 2(5-\alpha)+2(3\alpha-3)+4-3\alpha=10\ \ ;;$$

$$10-2\alpha+6\alpha-6+4-3\alpha=10\ \ ;;\ \ \alpha-2=0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\alpha=2}}$$

****

2º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, se pide:

a) Obtener razonadamente todos los valores de α para los que $\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ es la única solución de la ecuación matricial $A\cdot X=\alpha\cdot X$.

b) Resolver la ecuación matricial $A\cdot X=2X$.

----

a)

$$A\cdot X=\alpha\cdot X\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}6x+4y\\ -x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha x\\ \alpha y\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}6x+4y=\alpha x\\ -x+y=\alpha y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}(6-\alpha)x+4y=0\\ -x+(1-\alpha)y=0\end{array}\right\}.$$

Se trata de un sistema homogéneo que, para que tenga solamente la solución trivial x = 0, y = 0 es necesario que el rango de la matriz de coeficientes tenga de rango dos.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix}6-\alpha & 4\\ -1 & 1-\alpha\end{pmatrix}$.

$$Rango\ M\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}6-\alpha & 4\\ -1 & 1-\alpha\end{vmatrix}=6-6\alpha-\alpha+\alpha^2+4=0\ ;;\ \alpha^2-7\alpha+10=0.\ \alpha=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=$$

$$=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}\ \Rightarrow\ \underline{\alpha_1=2}\ ;;\ \underline{\alpha_2=5}\ \Rightarrow\ \alpha^2-7\alpha+10\neq 0\ \ para\ \alpha\neq 2\ \ y\ \ \alpha\neq 5.$$

$$\underline{\underline{Las\ soluciones\ para\ las\ que\ \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\ se\ produce\ son\ \forall\alpha\in R-\{2,\ 5\}}}$$

b)

$$A\cdot X=2\cdot X\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}6 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ ;;\ \begin{pmatrix}6x+4y\\ -x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}\ \Rightarrow\ \left.\begin{array}{l}6x+4y=2x\\ -x+y=2y\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}4x+4y=0\\ -x-y=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}x+y=0\\ x+y=0\end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{x+y=0}}$$

****

BLOQUE 2.- GEOMETRÍA.

1º) Dado el plano $\pi \equiv 2x+y+3z-1=0$ y el punto Q(2, 1, 3), se pide calcular:

a) La distancia del punto Q al plano π.

b) El área del triángulo cuyos vértices $P_1,\ P_2\ \ y\ \ P_3$ son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados.

c) El volumen del tetraedro de vértices $P_1,\ P_2,\ P_3\ \ y\ \ Q$.

----

a)

La distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $\alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dado por la fórmula: $d(P_0,\ \alpha)=\dfrac{|\ Ax_0+By_0+Cz_0+D\ |}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Considerando el punto Q(2, 1, 3) y el plano $\pi \equiv 2x+y+3z-1=0$ es:

$$d(Q,\ \pi)=\frac{|\ 2\cdot 2+1\cdot 1+3\cdot 3-1\ |}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}}=\frac{|\ 4+1+9-1\ |}{\sqrt{4+1+9}}=\frac{13}{\sqrt{14}}=\underline{\underline{\frac{13\sqrt{14}}{14}\ unidades=d(Q,\ \pi)}}$$

b)

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x+y+3z-1=0$ con los ejes coordenados son:

$$X \Rightarrow \begin{Bmatrix} y=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \rightarrow P_1\left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)\ ;;\ Y \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ z=0 \end{Bmatrix} \rightarrow P_2(0,\ 1,\ 0)\ ;;\ Z \Rightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow P_3\left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{3}\right)$$

Los vectores que determinan el triángulo son:

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{P_1P_2}=P_2-P_1=(0,\ 1,\ 0)-\left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)=\left(-\tfrac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$$

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{P_1P_3}=P_3-P_1=\left(0,\ 0,\ \tfrac{1}{3}\right)-\left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right)=\left(-\tfrac{1}{2},\ 0,\ \tfrac{1}{3}\right)$$

El área de un triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan dos vectores y el área del paralelogramo, a su vez, es el módulo del producto vectorial de los dos vectores, por lo cual:

$$S_{P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}\cdot\left|\ \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\ \right|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{3}i+\frac{1}{2}k+\frac{1}{6}j\right|=\frac{1}{12}\cdot\left|\ 2i+j+3k\ \right|=$$

$$= \frac{1}{12}\sqrt{2^2+1^2+3^2} = \frac{1}{12}\cdot\sqrt{14} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{14}}{12}\ u^2 = S_{P_1P_2P_3}}}$$

c)

Considerando el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{P_1Q} = Q - P_1 = (2,\ 1,\ 3) - \left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right) = \left(\frac{3}{2},\ 1,\ 3\right)$, los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ determinan un paralelepípedo cuya base es el triángulo considerado anteriormente y cuya arista lateral la constituye el vector $\overrightarrow{w}$.

Sabiendo que el volumen de un tetraedro es un sexto del volumen del paralelepípedo que determinan los mismos vectores que definen al tetraedro, es decir, un sexto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$, en valor absoluto:

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{6}\cdot V_{PARALELEPÍPEDO} = \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{3}{2}\right| = \frac{1}{36}\cdot\left|3+1+9\right| =$$

$$= \frac{1}{36}\cdot 13 = \underline{\underline{\frac{13}{36}\ u^3 = V_{TETRAEDRO}}}$$

****

2º) Dados los planos $\pi_1 \equiv x+2y+z+3=0 \;\; y \;\; \pi_2 \equiv 2x+y-z-6=0$, se pide:

a) Calcular el ángulo α que forman los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$.

b) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r, que es la intersección de los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$.

c) Comprobar que el plano $\pi \equiv x+y-1=0$ es el plano bisector de $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$, es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$, donde α es el ángulo obtenido en el apartado a).

----

a)

El ángulo que forman dos planos es el mismo que forman sus vectores normales.

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ 1) \;\; y \;\; \overrightarrow{n_2}=(2,\ 1,\ -1)$.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right| \cdot \cos\alpha \;\; \Rightarrow \;\; \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{\left|\overrightarrow{a}\right| \cdot \left|\overrightarrow{b}\right|}$.

Aplicando la fórmula a los vectores $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ 1) \;\; y \;\; \overrightarrow{n_2}=(2,\ 1,\ -1)$:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{(1,\ 2,\ 1)\cdot(2,\ 1,\ -1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2+2-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \underline{\underline{\alpha = 60^\circ}}$$

b)

Las ecuaciones implícitas de r son $r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}$.

Parametrizando una de las incógnitas y operando:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z+3=0 \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+2y=-3-\lambda \\ 2x+y=6+\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 2x+4y=-6-2\lambda \\ -2x-y=-6-\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; 3y=-12-3\lambda \;\;;;\;\; \underline{y=-4-\lambda} \;\;;;\;\; x=-2y-3-\lambda=8+2\lambda-3-\lambda=\underline{5+\lambda=x}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

c)

El plano bisector de dos planos dados es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los dos planos.

La distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $\alpha \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dado por la fórmula: $d(P_0,\ \alpha) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Siendo P(x, y, z) un punto perteneciente al plano bisector seria:

$$d(P,\ \pi_1) = d(P,\ \pi_2) \Rightarrow \frac{|x + 2y + z + 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2x + y - z - 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} \ ;;$$

$$\frac{|x + 2y + z + 3|}{\sqrt{6}} = \frac{|2x + y - z - 6|}{\sqrt{6}} \ ;; \ |x + 2y + z + 3| = |2x + y - z - 6| \Rightarrow Dos \ \ soluciones \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi' \equiv x + 2y + z + 3 = 2x + y - z - 6 = 0 \ \ ;; \ \ \underline{\pi' \equiv x - y - 2z - 9 = 0} \\ \pi'' \equiv x + 2y + z + 3 = -2x - y + z + 6 = 0 \ \ ;; \ \ \pi'' \equiv 3x + 3y - 3 = 0 \ \ ;; \ \ \underline{\pi'' \equiv x + y - 1 = 0} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{En \ \ efecto: \ el \ \ plano \ \ \pi \equiv x + y - 1 = 0 \ \ es \ \ bisector \ \ de \ \ \pi_1 \ \ y \ \ \pi_2, \ \ c.q.c.}}$$

****

BLOQUE 3.- ANÁLISIS.

1º) Dadas las funciones reales $f(x)=4x^2+2x+10$ y $g(x)=x^3+x^2+5x+5$, se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$.

b) Calcular la función $H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx$ que cumple que H(0) = 0.

----

a)

La función $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}$ tiene como asíntota horizontal la recta $y=0$ (eje X), por ser $y=k=\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}=0$.

Las asíntotas verticales son los valores de x que anulan el denominador y, como toda ecuación grado impar tiene al menos una solución, la función h(x) tiene por lo menos una asíntota vertical.

Resolvemos por Ruffini la ecuación $x^3+x^2+5x+5=0$:

Por ser todos los coeficientes positivos, probamos con un valor negativo, (-1):

	1	1	5	5
-1		-1	0	-5
	1	0	5	$\boxed{0}$

La recta $x=-1$ es asíntota vertical de la función $h(x)$.

Para que una función racional tenga asíntota oblicua es necesario que el numerador tenga de grado una unidad menos que el denominador, por lo tanto:

La función h(x) no tiene asíntotas oblicuas.

b)

Teniendo en cuenta la descomposición del denominador, la integral pedida es:

$$H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}\cdot dx=\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}\cdot dx=\int \frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}\cdot dx \ \Rightarrow$$

$$\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}=\frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+5}=\frac{A(x^2+5)+(x+1)(Bx+C)}{x^3+x^2+5x+5}=$$

$$= \frac{Ax^2 + 5A + Bx^2 + Cx + Bx + C}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + (5A+C)}{x^3 + x^2 + 5x + 5} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=4 \\ B+C=2 \\ 5A+C=10 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 2 - B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A+B=4 \\ 5A+(2-B)=10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} A+B=4 \\ 5A-B=8 \end{array}\right\} \Rightarrow 6A = 12 \;\;;;\;\; \underline{A=2} \;\;;;\;\; \underline{B=2} \;\;;;\;\; \underline{C=0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)} \cdot dx = \int \left(\frac{2}{x+1} + \frac{2x}{x^2+5} \right) dx = 2\int \frac{1}{x+1}\, dx + \int \frac{2x}{x^2+5}\, dx = \underline{2I_1 + I_2} \quad (*)$$

$$I = \int \frac{1}{x+1}\, dx = \underline{L\left| x+1 \right| = I_1}$$

$$I_2 = \int \frac{2x}{x^2+5}\, dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+5=t \\ 2x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I_2 = \int \frac{dt}{t} = L\left| t \right| = \underline{L\left| x^2+5 \right| = I_2}$$

Sustituyendo en (*) resulta:

$$H(x) = 2L\left| x+1 \right| + L\left| x^2+5 \right| + K = \underline{L\left[(x+1)^2\left(x^2+5\right)\right] + K = H(x)}$$

Teniendo en cuenta que H(0) = 0, sería:

$$H(0) = 0 \Rightarrow L\left[(0+1)^2\left(0^2+5\right)\right] + K = 0 \;\;;;\;\; L(1 \cdot 5) + k = 0 \;\;;;\;\; \underline{K = -L5}$$

$$H(x) = 2L\left| x+1 \right| + L\left| x^2+5 \right| - L5$$

$$\underline{\underline{H(x) = L\frac{(x+1)^2\left(x^2+5\right)}{5}}}$$

****

2º) Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x)=\frac{4}{x}$.

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 2.

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de f(x) para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto P(4, -8).

----

a)

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto; teniendo en cuenta que la recta normal es perpendicular a la tangente, su pendiente es la inversa de signo contrario de la tangente.

$$f'(x)=-\frac{4}{x^2} \;\Rightarrow\; m=f'(2)=-\frac{4}{2^2}=-\frac{4}{4}=\underline{-1=m} \;\;;;\;\; \underline{m'=1}$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(2)=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow \underline{A(2,\ 2)}$.

Sabiendo que la ecuación de una recta conocidos el punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y-y_0=m(x-x_0)$, las ecuaciones de las rectas tangente y normal son las siguientes:

$$\text{Recta tangente}: \; t\equiv y-2=-1(x-2)=-x+2 \;\;;;\;\; \underline{\underline{t\equiv x+y-4=0}}$$

$$\text{Recta normal}: \; n\equiv y-2=1(x-2)=x-2 \;\;;;\;\; \underline{\underline{n\equiv x-y=0}}$$

b)

El haz de rectas que pasan por el punto P(4, -8) es: $y+8=m(x-4)$.

Si tienen que cumplir que son tangentes a la función su pendiente tiene que ser la derivada de la función.

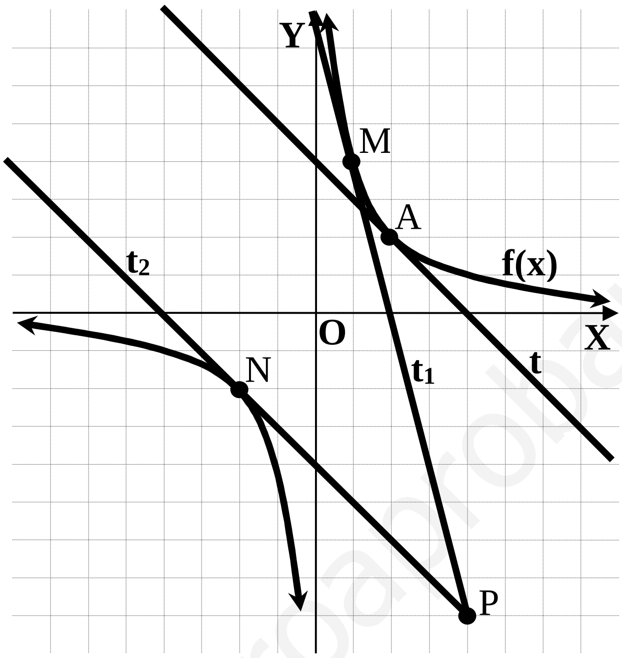
Teniendo en cuenta que $y=f(x)=\frac{4}{x}$ y que $m=f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ y que un punto genérico de la función es $P\left(x,\ \frac{4}{x}\right)$ sería:

$$\frac{4}{x}+8=-\frac{4}{x^2}(x-4) \;\;;;\;\; 4x+8x^2=-4(x-4)=-4x+16 \;\;;;\;\; 8x^2+8x-16=0 \;\;;;\;\; x^2+x-2=0$$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases}\underline{x_1=1}\\ \underline{x_2=-2}\end{cases}$$

Los puntos pedidos son $\Rightarrow \begin{cases} x=1 \rightarrow y=\frac{4}{1}=4 \Rightarrow \underline{\underline{M(1,\ 4)}} \\ x=-2 \rightarrow y=\frac{4}{-2}=-2 \Rightarrow \underline{\underline{N(-2,\ -2)}} \end{cases}$

Para ilustrar le resolución del problema hacemos una representación gráfica aproximada de la situación:



****

BLOQUE 4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1º) Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12+n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2-2n+10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número n de datos es grande, el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B.

Lo que el problema nos pide es demostrar que para n suficientemente grande tiene que ser $12+n\sqrt[4]{n^3}<n^2-2n+10$, o lo que es lo mismo: $\frac{12+n\sqrt[4]{n^3}}{n^2-2n+10}<1$.

Tomando límites del cociente cuando n tiende a infinito, el resultado tiene que ser menor que 1:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12+n\sqrt[4]{n^3}}{n^2-2n+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\sqrt[4]{n^7}}{n^2-2n+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+n^{\frac{7}{4}}}{n^2-2n+10}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12+n^{\frac{7}{4}}}{n^2}}{\frac{n^2-2n+10}{n^2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12}{n^2}+\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}}{1-\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}}=\frac{\frac{12}{\infty}+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}+\frac{10}{\infty}}=\frac{0+0}{1-0+0}=\frac{0}{1}=0<1$$

Lo anterior demuestra lo pedido.

****

2º) El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos A(-2, 0) y B(2, 0) y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas S(0, 2). Se pide:

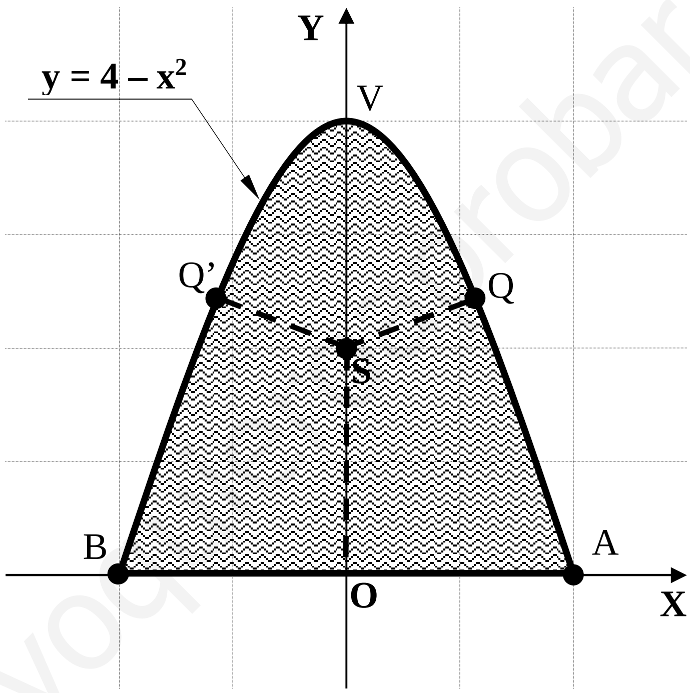
a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor.

b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor.

c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor?

----

a)



El borde rectilíneo del estanque es el segmento $\overline{AB}$ perteneciente a la recta y = 0; sus puntos tienen por expresión P(x, 0).

Se trata de averiguar el punto P'(x, 0) cuya distancia al punto S(0, 2) sea mínima.

$$d_{\overline{SP'}} = \overline{SP'} = \sqrt{(x-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{x^2+4} \;\;;;\;\; d'_{\overline{SP'}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = 0}$$

<u>Como cabía esperar, el punto más próximo al surtidor es O(0, 0).</u>

b)

Los puntos del arco de curva tienen por expresión $Q\left(x,\ 4 - x^2\right)$.

La distancia de cualquiera de sus puntos al punto S(0, 2) es:

$$d_{\overline{SQ}} = \overline{QS} = \sqrt{(0-x)^2 + \left[2-(4-x^2)\right]^2} = \sqrt{x^2 + (-2+x^2)^2} = \sqrt{x^2 + (x^2-2)^2}.$$

Para que la distancia sea mínima es condición necesaria que su derivada sea cero:

$$d'_{\overline{QS}} = \frac{2x + 2\cdot(x^2-2)\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}} = \frac{x+2x^3-4x}{\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}} = \frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}} = 0 \Rightarrow 2x^3-3x=0 \;;;$$

$$x(2x^2-3)=0 \Rightarrow \underline{x_1=0} \;;;\; x_2 = +\sqrt{\frac{3}{2}} = \underline{\frac{\sqrt{6}}{2} = x_2} \;;;\; \underline{x_3 = -\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

De la observación de la figura se deduce que para x = 0 la distancia al punto S no es mínima, por lo cual vamos a justificar, mediante la segunda derivada, que para x = 0 la segunda derivada no es positiva, que es condición necesaria para mínimo:

$$d''_{\overline{QS}} = \frac{(6x^2-3)\cdot\sqrt{x^2+(x^2-2)^2} - (2x^3-3x)\cdot\frac{2x+2\cdot(x^2-2)\cdot 2x}{2\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}}}{\left(\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{(6x^2-3)\cdot\sqrt{x^2+(x^2-2)^2} - (2x^3-3x)\cdot\frac{2x^3-3x}{\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}}}{x^2+(x^2-2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{(6x^2-3)\left[x^2+(x^2-2)^2\right]-(2x^3-3x)^2}{\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}}}{x^2+(x^2-2)^2} = \frac{(6x^2-3)(x^4-3x^2+4)-(4x^6-12x^4+9x^2)}{(x^2+x^4-4x^2+4)\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}} =$$

$$= \frac{6x^6-18x^4+24x^2-3x^4+9x^2-12-4x^6+12x^4-9x^2}{(x^2+x^4-4x^2+4)\sqrt{x^2+(x^2-2)^2}} = \frac{2x^6-9x^4+24x^2-12}{(x^4-3x^2+4)\sqrt{x^4-3x^2+4}}$$

$$d''_{\overline{QS}}(0) = \frac{-12}{4\sqrt{4}} < 0 \Rightarrow \underline{\text{Para } x = 0 \text{ no es distancia mínima.}}$$

Por el contrario, para los valores $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$ la segunda derivada resulta positiva, como comprobamos a continuación:

$$d''_{\overline{QS}}\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{\frac{27}{4}-\frac{81}{4}+36-12}{\left(\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4\right)\sqrt{\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4}} = \frac{24-\frac{54}{4}}{\frac{55}{4}\sqrt{\frac{55}{4}}} = \frac{\frac{96-54}{4}}{\frac{55}{4}\sqrt{\frac{55}{4}}} = \frac{42}{\frac{55}{2}\sqrt{55}} = \frac{84}{55\sqrt{55}} > 0 \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}}$$

Los puntos pedidos son los siguientes, teniendo en cuenta que la función es simétrica con respecto al eje de ordenadas:

$$y\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=4-\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=4-\frac{6}{4}=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow \underline{\underline{Q\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{5}{2}\right)}}\quad y\quad \underline{\underline{Q'\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{5}{2}\right)}}$$

c)

Se trata de comparar las distancias $d_{\overline{OS}}=2\quad y\quad d_{\overline{SQ}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Es evidente que $d_{\overline{OS}}>d_{\overline{SQ}}$, por lo cual:

<u>Los puntos más próximos al surtidor son Q y Q'.</u>

****