# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# UNIVERSIDAD DE VALENCIA

# JUNIO – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos

Se elegirán TRES bloque y se hará un problema de cada uno de ellos.
Cada estudiante podrá disponer de una calculadora científica o gráfica. Se prohíbe su utilización indebida (guardar fórmulas o texto en memoria). Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos y gráficos deberán estar debidamente justificados.

## BLOQUE 1.- ÁLGEBRA LINEAL.

1º) Dadas las matrices $B(x)=\begin{pmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $C(y)=\begin{pmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$:

a ) Calcular el determinante de la matriz 3B(x) y obtener el valor de x para el que dicho determinante vale 162.

b ) Demostrar que la matriz C(y) no tiene inversa para ningún valor real de y.

---

a )

$$|3B(x)| = 3^3 \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 6 \\ 2x+3 & 3 & 6 \\ 4x+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 27 \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} x+2 & 4 & 1 \\ 2x+3 & 3 & 1 \\ 4x+4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 162 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} x & 4 & 1 \\ 2x & 3 & 1 \\ 4x & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right\} =$$

$$= 162 \cdot \left\{ x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + (6+6+16-12-4-12) \right\} = 162 \cdot \{x \cdot (3+4+16-12-2-8)+0\} =$$

$$= 162 \cdot (x) = \underline{\underline{162x = |3 \cdot B(x)|}} \Rightarrow 162x = 162 \;;; \underline{\underline{x=1}}$$

b )

Para que una matriz no tenga inversa es necesario que su determinante sea nulo.

$$|C(y)| = \begin{vmatrix} 3y+5 & 7 & 12 \\ 2y+3 & 3 & 6 \\ 3y+4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3y & 7 & 12 \\ 2y & 3 & 6 \\ 3y & 2 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

(Nótese que el segundo de los determinantes anteriores es cero por ser la última columna igual a la suma de las dos primeras)

$$|C(y)| = 6y \cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6y \cdot (9+8+21-18-6-14) = 6y \cdot (38-38) = 6y \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$$

$$\underline{|C(y)| = 0, \ \forall y \in R} \ \Rightarrow \ \underline{\underline{C \text{ no es inversible } \forall y \in R, \text{ como queríamos demostrar.}}}$$

**********

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ ax+y+z=9 \end{cases}$, se pide:

a ) Probar que es siempre compatible, obteniendo los valores de $\alpha$ para los que es indeterminado.

b ) Resolver el sistema anterior para $\alpha = 7$.

---

a )

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 9 \\ \alpha & 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

De la observación de la matriz ampliada se deduce que, independientemente del valor de $\alpha$, el sistema es compatible por tener esta matriz iguales las dos últimas columnas, por lo cual:

*El sistema es compatible* $\forall \alpha \in R$, *como teníamos que probar*.

El rango de las dos matrices en función de $\alpha$ es:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+3+\alpha^2-5\alpha-1-3\alpha = \alpha^2-8\alpha+7=0 \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{8 \pm 6}{2} \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 7} \; ;; \; \underline{\alpha_2 = 1}$$

$$Para \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 7 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^o\ incóg \Rightarrow S.\ Compatible\ Indeterminado$$

b )

Para $\alpha = 7$ es $\begin{cases} x+7y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ 7x+y+z=9 \end{cases}$; despreciando la última ecuación y parametrizando la variable z, resulta:

$$\left.\begin{matrix} x+7y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+7y=9-\lambda \\ 3x+5y=9-\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 3x+21y=27-3\lambda \\ -3x-5y=-9+\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 16y = 18-2\lambda \; ;;$$

www.yoquieroaprobar.es

$$8y = 9 - \lambda \;;;\; \underline{y = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\lambda} \;;;\; x + 7y = 9 - \lambda \;;;\; x + \frac{63}{8} - \frac{7}{8}\lambda = 9 - \lambda \;;;\; \underline{x = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\lambda}$$

$$\textit{Solución} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\lambda \\ y = \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\lambda \;;\; \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

**********

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE 2.- GEOMETRÍA.

1º) Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2y-1}{-6} = \dfrac{2z-3}{6}$ y $s \equiv \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{2y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$, que se cortan, se pide:

a ) El punto P de corte de las rectas r y s.

b ) Un vector direccional de r y otro de s, el ángulo $\alpha$ que forman las rectas r y s en el punto de corte P.

c ) La ecuación implícita o general del plano $\pi$ que contiene a las rectas r y s.

---

a )

El ejercicio da por cierto que las rectas se cortan, por lo cual no se demuestra tal hecho. El punto de corte es aquél en el que se igualan cada una de las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x-3}{-2} \Rightarrow -2x+2 = 2x-6 \;;;\; 8 = 4x \;;;\; \underline{x = 2} \\ \dfrac{2y-1}{-6} = \dfrac{2y+3}{2} \Rightarrow 4y-2 = -12y-18 \;;;\; 16y = -16 \;;;\; \underline{y = -1} \\ \dfrac{2z-3}{6} = \dfrac{z-1}{4} \Rightarrow 8z-12 = 6z-6 \;;;\; 2z = 6 \;;;\; \underline{z = 3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{P(2,\ -1,\ 3)}}$$

b )

Para determinar unos vectores directores de las rectas r y s las expresamos por ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = 2\lambda \\ 2y-1 = -6\lambda \\ 2z-3 = 6\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - 3\lambda \\ z = \dfrac{3}{2} + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r} = (2,\ -3,\ 3)}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4} \Rightarrow \begin{cases} x-3 = -2\lambda \\ 2y+3 = 2\lambda \\ z-1 = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = -\dfrac{3}{2} + \lambda \\ z = 1+4\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_s} = (-2,\ 1,\ 4)}$$

El ángulo que forman las rectas es el mismo que forman sus vectores directores, y utilizando el producto escalar de dos vectores:

www.yoquieroaprobar.es

$$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = \left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} =$$

$$= \frac{(2,\ -3,\ 3)\cdot(-2,\ 1,\ 4)}{\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+1^2+4^2}} = \frac{-4-3+12}{\sqrt{4+9+9}\cdot\sqrt{4+1+16}} = \frac{5}{\sqrt{22}\cdot\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}} =$$

$$= 0'2326 \Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = 76^o\ 32'\ 55''}}$$

c )

El plano $\pi$ puede determinarse por los vectores directores de las rectas y un punto de una de las rectas, por ejemplo el punto $P(2,\ -1,\ 3)$, que perteneciente a las:

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0\ ;;$$

$$-12(x-2)+2(z-3)-6(y+1)-6(z-3)-3(x-2)-8(y+1)=0\ ;;$$

$$-15(x-2)-14(y+1)-4(z-3)=0\ ;;\ 15(x-2)+14(2y+1)+4(z-3)=0\ ;;$$

$$15x-30+14y+14+4z-12=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv 15x+14y+4z-28=0}}$$

**********

www.yoquieroaprobar.es

2º) Dados el punto P(3, -1, 4) y la recta $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$, se pide:

a ) Hallar la distancia del punto P a la recta r.

b ) Justificar que la recta s que pasa por P y tiene a $\vec{v} = (1,\ -1,\ 1)$ como vector direccional no corta a r.

c ) Calcular la distancia entre las rectas r y s.

---

a )

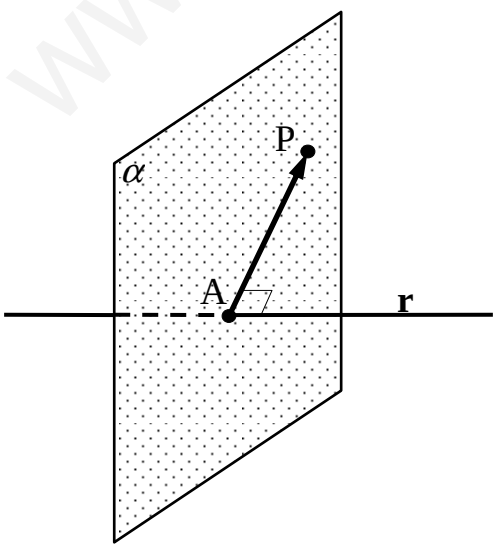
La distancia de un punto a una recta se obtiene de la fórmula: $d(P,\ r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}\right|}$,

siendo Q(-2, 0, 1) un punto de r y $\vec{v}_r = (3,\ -2,\ 4)$ un vector director de la recta r.

$\overrightarrow{QP} = P - Q = (3,\ -1,\ 4) - (-2,\ 0,\ 1) = \underline{(5,\ -1,\ 3) = \overrightarrow{QP}}$.

$$d(P,\ r) = \frac{\left|\overrightarrow{QP} \wedge \vec{v}_r\right|}{\left|\vec{v}\right|} = \frac{\begin{Vmatrix} i & j & k \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{Vmatrix}}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{\left|-4i + 9j - 10k + 3k + 6i - 20j\right|}{\sqrt{9 + 4 + 16}} = \frac{\left|2i - 11j - 7k\right|}{\sqrt{29}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{4 + 121 + 49}}{\sqrt{29}} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{174}{29}} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ u = d(P,\ r)}}$$




Este apartado puede resolverse de una forma más larga pero también más comprensible, que es como se hace a continuación y que se ilustra con la figura adjunta.

El plano $\alpha$ perpendicular a la recta r y que pasa por el punto P(3, -1, 4) pertenece al haz de planos $\pi$ cuyo vector normal es el vector director de la recta, o sea: $\vec{n} = (3,\ -2,\ 4)$ y $\pi \equiv 3x - 2y + 4z + D = 0$.

Para determinar el valor de D tenemos en cuenta que $P \in \alpha$:

www.yoquieroaprobar.es

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 3x-2y+4z+D=0\\ P(3,\ -1,\ 4)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 3\cdot 3-\ 2\cdot(-1)+4\cdot 4+D=0\ ;;\ 9+2+16+D=0\ ;;\ \underline{D=-27}$$

El plano buscado es $\alpha \equiv 3x-2y+4z-27=0$.

El punto A de corte de la recta r con el plan $\alpha$ es el siguiente.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv 3x-2y+4z-27=0\\ r \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1+4\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 3(-2+3\lambda)-2(-2\lambda)+4(1+4\lambda)-27=0\ ;;$$

$$-6+9\lambda+4\lambda+4+16\lambda-27=0\ ;;\ 29\lambda=29\ \Rightarrow\ \underline{\lambda=1}\ \Rightarrow \begin{cases} x=-2+3=1 \\ y=-2 \\ z=1+4=5 \end{cases} \Rightarrow\ \underline{A(1,\ -2,\ 5)}$$

La distancia pedida es el módulo del vector $\overrightarrow{AP}$:

$$d(P,\ r)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=|P-A|=|(3,\ -1,\ 4)-(1,\ -2,\ 5)|=|(2,\ 1,\ -1)|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=$$

$$=\sqrt{4+1+1}=\underline{\underline{\sqrt{6}\ u=d(P,\ r)}}$$

b )

La recta s que pasa por P(3, -1, 4) y tiene como vector director a $\overrightarrow{v_s}=(1,\ -1,\ 1)$ tiene por ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=4+\lambda \end{cases}$.

Tenemos que justificar que las rectas $r \equiv \begin{cases} x=-2+3\lambda \\ y=-2\lambda \\ z=1+4\lambda \end{cases}$ y s no se cortan.

Para que las rectas r y s no se corten es necesario que el conjunto de los vectores directores de las rectas y un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga por origen un punto de una de las rectas y por extremo otro punto de la otra recta, no sean coplanarios.

Un punto de s es P(3, -1, 4) y un punto de r es Q(3, 0, 4), por lo que el vector $\overrightarrow{w}$ es el siguiente: $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(3,\ 0,\ 4)-(3,\ -1,\ 4)=(0,\ 1,\ 0)$.

El conjunto de vectores es $\left\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right\}$, cuyo rango tiene que ser tres:

www.yoquieroaprobar.es

$$Rango\ \{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4-3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\} = 3}$$

Las rectas r y s no se cortan, como queríamos justificar.

c )

Tenemos que calcular la distancia entre las rectas r y s.

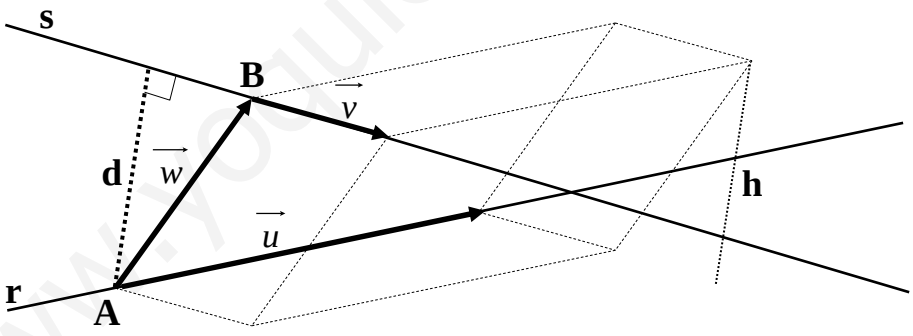
Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2+3\lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1+4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u} = (3,\ -2,\ 4) \\ \\ A(-2,\ 0,\ 1) \end{cases} \quad ;; \quad s \equiv \begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 4+\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v} = (1,\ -1,\ 1) \\ \\ B(3,\ -1,\ 4) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (3,\ -1,\ 4) - (-2,\ 0,\ 1) = (5,\ -1,\ 3).$$

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.




Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto B de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

www.yoquieroaprobar.es

$$V = \vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right) = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| \cdot h = \left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| \cdot d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|}$$

$$d(r,\ s) = \frac{\left|\vec{u} \cdot \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right)\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}\right|} = \frac{\left|-9-4-10+20+3+6\right|}{\left|-2i+4j-3k+2k+4i-3j\right|} = \frac{\left|29-23\right|}{\left|2i+j-k\right|} =$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ u = d(r,\ s)}}$$

**********

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE 3.- ANÁLISIS.

1º) Se consideran las funciones $f(x)=12x^3-8x^2+9x-5$ y $g(x)=6x^2-7x+2$, se pide:

a ) Determinar las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$.

b ) Calcular la función $H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}\cdot dx$ que cumple que H(1) = 1.

---

a )

La función $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}$ no tiene asíntotas horizontales, por ser $\lim_{x\to\pm\infty} h(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=\pm\infty$.

Las asíntotas verticales son los valores finitos de x que anulan el denominador:

$$6x^2-7x+2=0\ ;;\ x=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{12}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{12}=\frac{7\pm1}{12}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2}{3}\\ x_2=\frac{1}{2}\end{cases}.$$

*Las rectas* $x=\frac{2}{3}$ *y* $x=\frac{1}{2}$ *son asíntotas verticales*.

Por tener la función racional h(x) un grado mayor el numerador, la función puede tener asíntota oblicua de la forma y = mx + n, siendo los posibles valores de m y n los siguientes:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{x(6x^2-7x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x}=\underline{2=m}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[h(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\right]=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5-12x^3+14x^2-4x}{6x^2-7x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2}=\underline{1=n}$$

La recta y = 2x +1 es asíntota oblicua de la función dada.

b )

$$H(x)=\int\frac{f(x)}{g(x)}\cdot dx=\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}\cdot dx\Rightarrow$$

(Realizando la división de los polinomios)

www.yoquieroaprobar.es

$$\begin{array}{rrrr|l} 12x^3 & -8x^2 & +9x & -5 & 6x^2-7x+2 \\ \cline{5-5} -12x^3 & +14x^2 & -4x & & 2x+1 \\ \cline{1-3} 0 & +6x^2 & +5x & -5 & \\ & -6x^2 & +7x & -2 & \\ \cline{2-4} & 0 & +12x & -7 & \end{array}$$

$$\Rightarrow H(x)=\int \frac{f(x)}{g(x)}\cdot dx=\int\left(2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right)dx=\int(2x+1)\,dx+\int\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\,dx=$$

$$=\frac{2x^2}{2}+x+L\left|6x^2-7x+2\right|+C=\underline{x^2+x+L\left|6x^2-7x+2\right|+C=H(x)}$$

Teniendo en cuenta que H(1) = 1, sería:

$$H(1)=1\ \Rightarrow\ 1+1+L\left|6-7+2\right|+C=1\ ;;\ 2+L1+C=1\ ;;\ 2+0+C=1\ ;;\ \underline{\underline{C=-1}}$$

$$\underline{\underline{H(x)=x^2+x+L\left|6x^2-7x+2\right|-1}}$$

**********

www.yoquieroaprobar.es

2º) Se considera la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son parámetros reales.

a ) Averigua los valores de a y b para los que las rectas tangentes a la gráfica de f(x) en los puntos de abscisas x = 2 y x = 4 son paralelas al eje OX.

b ) Con los valores de a y b hallados anteriormente, obtener el valor de c para que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de f(x) está en el eje OX.

---

a )

Las rectas paralelas al eje OX tienen de pendiente cero.

La pendiente a una función en un punto es igual que el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow \begin{cases} f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0 \;;; \underline{4a + b = -12} & (1) \\ f'(4) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 4^2 + 2a \cdot 4 + b = 0 \;;; \underline{8a + b = -48} & (2) \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2) se obtienen los valores de a y b:

$$\left.\begin{matrix} 4a + b = -12 \\ 8a + b = -48 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} -4a - b = 12 \\ 8a + b = -48 \end{matrix} \Rightarrow 4a = -36 \;;; \underline{\underline{a = -9}} \;;; 8a + b = -48 \;;; -72 + b = -48 \;;;$$

$$b = -48 + 72 \;;; \underline{\underline{b = 24}}$$

b )

La función resultante con los valores obtenidos es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c$.

Para que exista un punto de inflexión es necesario que la segunda derivada sea cero:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \;;; \; f''(x) = 6x - 18 = 0 \Rightarrow 6x - 18 = 0 \;;; x - 3 = 0 \;;; \underline{x = 3}.$$

Como el punto de inflexión tiene que estar sobre el eje OX tiene que ser f(3) = 0:

$$f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + c = 0 \;;; 27 - 81 + 72 + c = 0 \;;; 18 + c = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c = -18}}$$

**********

www.yoquieroaprobar.es

BLOQUE 4.- RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

1º) Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de la venta de la producción diaria sea máximo.

---

El valor de la venta diaria es: $V = 100x + 250 \cdot \frac{40-5x}{10-x}$ euros.

Por ser 8 toneladas la producción máxima de acero de baja calidad, tiene que ser:

$$\frac{40-5x}{10-x} \le 8 \;\; ;; \;\; 40-5x \le 80-8x \;\; ;; \;\; 3x \le 40 \;\; ;; \;\; \underline{x \le \frac{40}{3}}$$

Para que el valor de la venta diaria sea máximo, su derivada tiene que ser cero:

$$V' = 100 + 250 \cdot \frac{-5 \cdot (10-x) - (40-5x) \cdot (-1)}{(10-x)^2} = 100 + 250 \cdot \frac{-50+5x+40-5x}{(10-x)^2} =$$

$$= 100 + 250 \cdot \frac{-10}{(10-x)^2} = 100 - \frac{2500}{(10-x)^2} = 0 \;\; ;; \;\; 100 = \frac{2500}{(10-x)^2} \;\; ;; \;\; 1 = \frac{25}{(10-x)^2} \;\; ;;$$

$$(10-x)^2 = 25 \;\; ;; \;\; 10-x = 5 \;\; ;; \;\; \underline{x = 5} \Rightarrow \left( x < \frac{40}{3} \right)$$

<u>En efecto, para una producción diaria de 5 toneladas de acero de baja calidad se produce un máximo beneficio, como se nos pedía demostrar.</u>

**********

www.yoquieroaprobar.es

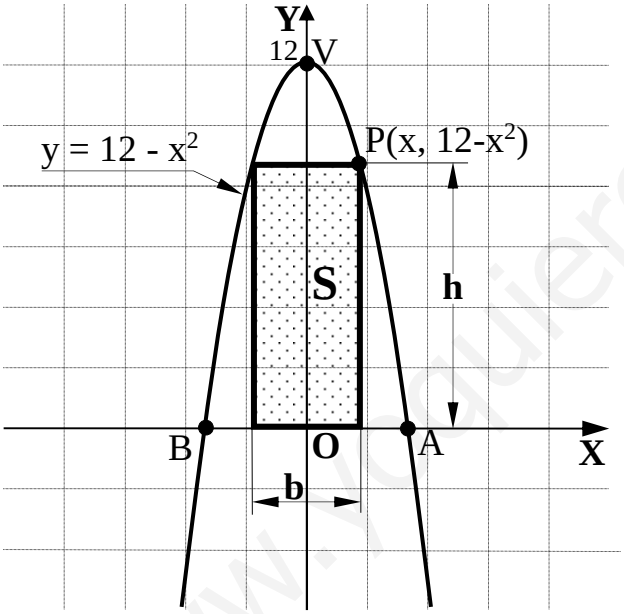
2º) Halla las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros vértices están situados sobre el eje OX.

---

La parábola $y = 12 - x^2$, que es cóncava $(\cap)$ y par, por lo que es simétrica con respecto al eje OY, tiene su vértice en el punto V(0, 12) y corta al eje OX en los siguientes puntos:

$$y = 12 - x^2 = 0 \;;;\; x^2 = 12 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \;\rightarrow\; \underline{A\left(2\sqrt{3},\ 0\right)} \\ \\ x_2 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \;\rightarrow\; \underline{B\left(-2\sqrt{3},\ 0\right)} \end{cases} .$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta.




Los puntos de la parábola tiene la expresión $P\left(x,\ 12 - x^2\right)$.

Teniendo en cuenta que b = 2x y el valor de h es h = 12 – x², el valor de la superficie en función de x es la siguiente:

$$S = b \cdot h = 2x \cdot \left(12 - x^2\right) = 24x - 2x^3 \ .$$

El valor de la superficie será máximo cuando su derivada sea cero:

$$S' = 24 - 6x^2 = 6\left(4 - x^2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 2} \\ \underline{x_2 = -2} \end{cases} .$$

Como quiera que el valor negativo carece de sentido, las dimensiones del rectángulo de área máxima son: b = 2x = 4; h = 12 – 2² = 8.

<u>El cartel de área máxima tiene 4 unidades de base y 8 de altura.</u>

**********

www.yoquieroaprobar.es