Opción A

Problema A.1- Sea el sistema de ecuaciones $S:\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 3x+10y-z=0 \\ x+14y+\alpha z=0 \end{cases}$, donde α es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:
a) La solución del sistema **S** cuando $\alpha=0$.**(4 puntos)**
b) El valor de α para el que el sistema **S** tiene infinitas soluciones.**(4 puntos)**
c) Todas las soluciones del sistema S cuando se da a α el valor obtenido en el apartado b)
(2 puntos)

En general y para los tres apartados una ecuación homogénea solo puede ser compatible determinado o compatible indeterminado y para diferenciar ambos casos hay que recurrir al determinante que se forma con los coeficientes siendo no nulo para los determinados (que todos tienen la misma solución, la denominada trivial) y nulo para los de compatibilidad indeterminada.

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 3 & 10 & -1\\ 1 & 14 & 0\end{vmatrix}=2-126+30+14=-80\neq 0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado\Rightarrow$$

$$Solución\Rightarrow(x\ ,y\ ,z)=(0\ ,0\ ,0)$$

b)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -3\\ 3 & 10 & -1\\ 1 & 14 & \alpha\end{vmatrix}=10\alpha+2-126+30+14+6\alpha=16\alpha-80\Rightarrow Si\ |A|=0\Rightarrow 16\alpha-80=0\Rightarrow\alpha=5$$

$$Cuando\ \alpha=5\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rang(A)=2<Número\ de\ incógnitas\Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

c)

$$Si\ \alpha=5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -3 & 0\\ 3 & 10 & -1 & 0\\ 1 & 14 & 5 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 16 & 8 & 0\\ 0 & 16 & 8 & 0\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & -3 & 0\\ 0 & 16 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow 16y+8z=0\Rightarrow 2y+z=0\Rightarrow z=-2y\Rightarrow$$

$$x-2y-3\cdot(-2y)=0\Rightarrow x-2y+6y=0\Rightarrow x=-4y\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\ ,y\ ,z)=(-4\lambda\ ,\lambda\ ,-2\lambda)$$

Problema A.2.- En el espacio se tiene la recta $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: x+mz=0$, donde **m** es un parámetro real. Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de la rectas **r** **(2 puntos)**

b) El valor de **m** para el que la recta **r** y el plano π son perpendiculares **(2 puntos)**

c) El valor de **m** para el que la recta **r** y el plano π son paralelos **(3 puntos)**

d) La distancia entre **r** y π cuando se da a **m** el valor obtenido en el apartado c) **(3 puntos)**

a) El vector director es el determinado por el producto vectorial de los vectores de los planos que definen a la recta **r**

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_1}=(1,1,-1) \\ \overrightarrow{v_2}=(1,-1,-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}-\vec{k}-\vec{i}+\vec{j}=-2\vec{i}-2\vec{k}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_r}=(-2,0,-2)\equiv(1,0,1)$$

b) Como los vectores directores de la recta y el plano, al ser perpendiculares entre si, son paralelos son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,0,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1,0,m) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{0}{0}=\frac{1}{m}\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{1}{m}\Rightarrow m=1$$

c) Como los vectores directores de la recta y el plano, al ser paralelos entre si, son perpendiculares, su producto escalar es nulo

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,0,1) \\ \overrightarrow{v_\pi}=(1,0,m) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\perp\overrightarrow{v_\pi}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}=0\Rightarrow(1,0,1)\cdot(1,0,m)=0\Rightarrow 1+m=0\Rightarrow m=-1$$

c) Es la distancia que hay, al ser paralelos, entre uno cualquiera de los puntos **R** de la recta **r** y el plano π

$$2x-2z=1\Rightarrow x-z=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{1}{2}+z\Rightarrow\frac{1}{2}+z-y-z=0\Rightarrow y=\frac{1}{2}\Rightarrow R\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)\Rightarrow$$

$$d(r,\pi)=d(R,\pi)=\frac{\left|\frac{1}{2}-0\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\left|\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\,u$$

Problema A.3.- Se definen las funciones **f** y **g** por **f(x) = -x² + 2x** y **g(x) = x².**
Obtener **razonadamente:**
a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones**(2 puntos)**
b) El máximo relativo de la función **f(x) = -x² + 2x** y el mínimo relativo de **g(x) = x² (2 puntos)**
c) Los puntos de intersección de las curvas **y = -x² + 2x** e **y = x² (2 puntos)**
d) El área encerrada entre las curvas **y = -x² + 2x** e **y = x²,** donde en ambas curvas la **x** varia entre **0** y **1 (4 puntos)**

$a)$

$$f'(x) = -2x + 2 \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow -2x + 2 > 0 \Rightarrow -2x > -2 \Rightarrow 2x < 2 \Rightarrow x < 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Crecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x < 1 \\ Decrecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > 1 \end{cases}$$

$$g'(x) = 2x \Rightarrow Crecimiento \Rightarrow g'(x) > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow \begin{cases} Crecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x > 0 \\ Decrecimiento \Rightarrow \forall x \in \Re \,/\, x < 0 \end{cases}$$

$b)$

$$Máximo\ relativo\ en\ x = 1 \Rightarrow f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1 \Rightarrow De\ crecimiento\ pasa\ a\ decrecimiento$$

$$Mínimo\ relativo\ en\ x = 0 \Rightarrow g(0) = 0^2 = 0 \Rightarrow De\ decrecimiento\ pasa\ a\ crecimiento$$

$c)$

$$-x^2 + 2x = x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x\,(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

$d)$

$$\frac{1}{2} \in [0\,,1] \Rightarrow \begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \Rightarrow Positivo \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow Positivo \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$A = \int_0^1 \left(-x^2 + 2x\right) dx - \int_0^1 x^2\ dx = \int_0^1 \left(-2x^2 + 2x\right) dx = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}\,u^2$$

Opción B

Problema B.1- Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, U=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y ***B,*** donde ***B*** es una matriz de dos filas y dos columnas que no tiene ningún elemento nulo y que verifica la relación
B^2 = -7B + U. Obtener **razonadamente**:
a) Los números reales **a** y **b** tales que **A^2 = aA + bU (4 puntos)**
b) Los números reales **p** y **q** tales que **B^{-1} = pB + qU (2 puntos),** justificando que la matriz **B** tiene inversa **(2 puntos),**
c) Obtener los valores **x** e **y** para los que se verifica **B^3 = xB + yU (2 puntos)**

a)

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & -a\\ a & a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b & -a\\ a & a+b\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\Rightarrow b=-a\\ -a=-2\Rightarrow a=2\\ a=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-2\end{cases}$$

b)

$$B^2+7B=U\Rightarrow B(B+7)=U\Rightarrow B(B+7U)=U\Rightarrow B^{-1}B\cdot(B+7U)=B^{-1}U\Rightarrow B^{-1}=U\cdot(B+7U)=$$
$$B^{-1}=B+7U\Rightarrow$$

$$B^{-1}=B+7U=pB+qU\Rightarrow\begin{cases}p=1\\ q=7\end{cases}\Rightarrow$$

c)

$$B^3=B^2\cdot B=(-7B+U)\cdot B=-7B^2+UB=-7B^2+B=-7\cdot(-7B+U)+B=49B-7U+B=48B-7U$$

$$B^3=48B-7U=xB+yU\Rightarrow\begin{cases}x=48\\ y=-7\end{cases}$$

Problema B.2.- En el espacio se dan los planos π , σ y τ de ecuaciones $\pi : 2x - y + z = 3;$ $\sigma : x - y + z = 2$; $\tau : 3x - y - az = b$ siendo **a** y **b** parámetros reales, y la recta **r** intersección de los planos π y σ. Obtener **razonadamente**:

a) Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta **r.(3 puntos)**
b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto **(2 , 1 , 3) (4 puntos)**
c) Los valores de a y b para que el plano τ contenga a la recta r intersección de los planos π y σ **(3 puntos)**

a)

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ -x + y - z = -2 \end{cases} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow 1 - y + z = 2 \Rightarrow z = 1 + y \Rightarrow \begin{cases} Punto\ R(1\ ,0\ ,1) \\ v_r = (0\ ,1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

b) El plano π queda determinado por el vector director de la recta **r**, por el vector formado por el punto dado **P** y un punto cualquiera **R** de la recta **r**(tomaremos el indicado en la ecuación) y por el formado por el punto P y el punto G genérico del plano.
Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) y el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por eso el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (0\ ,1\ ,1) \\ \overrightarrow{PR} = (1\ ,0\ ,1) - (2\ ,1\ ,3) = (-1\ ,-1\ ,-2) \equiv (1\ ,1\ ,2) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (2\ ,1\ ,3) = (x-2\ ,y-1\ ,z-3) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2(x-2) + (y-1) - (z-3) - (x-2) = 0 \Rightarrow (x-2) + (y-1) - (z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + y - z = 0$$

c) El sistema que forman los tres planos, al determinar una recta común, tiene infinitas soluciones siendo compatible indeterminado

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \\ 3x - y - az = b \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -a & b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & -4 \\ -6 & 2 & 2a & -2b \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2a+3 & -2b+9 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+3-1 & -2b+9-1 \end{array}\right) \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) \Rightarrow \begin{cases} 2a + 2 = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow a = -1 \\ -2b + 8 = 0 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

Problema B.3.- Se desea construir un depósito cilíndrico de **100 m^3** de capacidad, abierto por la parte superior. Su base es un círculo en posición horizontal de radio x y la pared vertical del deposito es una superficie cilíndrica perpendicular a su base.
El precio del material de la base es de **4 euros/m^2**
El precio del material de la pared vertical es de **2 euros/m^2**
Obtener **razonadamente**:
a) El área de la base en función de su radio **x.(1 punto)**
b) El área de la pared vertical en función de **x (2 puntos)**
c) La función $f(x)$ que da el coste del depósito **(2 puntos)**
d) El valor **x** del radio de la base para que el coste del depósito es mínimo y el valor de dicho coste mínimo **(5 puntos)**

$a)$

$$Area\ de\ la\ base = \pi x^2$$

$b)$

$$Siendo\ h\ la\ altura\ del\ cilindo \Rightarrow Area\ de\ la\ \ pared\ vertical = 2\pi xh$$

$c)$

$$f(x) = 4\pi x^2 + 2\cdot 2\pi xh = 4\pi x(x+h)$$

$d)$

$$\begin{cases} 100 = \pi x^2 h \Rightarrow h = \dfrac{100}{\pi x^2} \\ f(x) = 4\pi x(x+h) \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4\pi x\left(x + \frac{100}{\pi x^2}\right) = 4\pi x\frac{\pi x^3 + 100}{\pi x^2} = 4\frac{\pi x^3 + 100}{x} \Rightarrow$$

$$f'(x) = 4\cdot\frac{3\pi x^2 x - (\pi x^3 + 100)}{x^2} = 4\cdot\frac{3\pi x^3 - \pi x^3 - 100}{x^2} = 4\cdot\frac{2\pi x^3 - 100}{x^2} = 8\cdot\frac{\pi x^3 - 50}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$8\cdot\frac{\pi x^3 - 50}{x^2} = 0 \Rightarrow \pi x^3 = 50 \Rightarrow x^3 = \frac{50}{\pi} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{50}{\pi}} = \frac{\sqrt[3]{50\cdot\pi^2}}{\pi} \Rightarrow f''(x) = 8\cdot\frac{3\pi x^2 x^2 - 2x(\pi x^3 - 50)}{x^4}$$

$$f''(x) = 8\cdot\frac{3\pi x^3 - 2(\pi x^3 - 50)}{x^3} = 8\cdot\frac{3\pi x^3 - 2\pi x^3 + 100}{x^3} = 8\cdot\frac{\pi x^3 + 100}{x^3} \Rightarrow$$

$$f''\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 8\cdot\frac{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^3 + 100}{\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^3} = 8\cdot\frac{\pi\cdot\frac{50}{\pi} + 100}{\frac{50}{\pi}} = 8\cdot\frac{50+100}{\frac{50}{\pi}} = 8\cdot\frac{150\pi}{50} = 24\pi > 0 \Rightarrow Mínimo$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{50\cdot\pi^2}}{\pi}\ m \\ h = \dfrac{100}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^2} = \dfrac{100}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{2500}{\pi^2}}\right)} = \dfrac{100\sqrt[3]{\pi^2}}{\pi\sqrt[3]{50^2}} = \dfrac{100\sqrt[3]{50\pi^2}}{50\pi} = \dfrac{2\sqrt[3]{50\pi^2}}{\pi}\ m \end{cases} \Rightarrow$$

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right) = 4\frac{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}\right)^3 + 100}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 4\frac{\pi\cdot\frac{50}{\pi} + 100}{\sqrt[3]{\frac{50}{\pi}}} = 4\frac{150\cdot\sqrt[3]{\pi}}{\sqrt[3]{50}} = 4\frac{150\cdot\sqrt[3]{2500\pi}}{50} = 12\cdot\sqrt[3]{2500\pi}\ euros$$