PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2016

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Una fábrica de muebles de cocina vende 1.000 unidades mensuales de un modelo de armario a 200 euros por unidad. Para reducir el stock, hace una oferta a los compradores y estima que, por cada euro de reducción del precio, las ventas mensuales del producto se incrementarán en 100 unidades.

a) ¿Cuántas unidades habrá que vender para obtener el máximo de ingresos mensuales?

b) ¿A cuánto ascenderán estos ingresos?

----

a)

Sean x las centenas de unidades que deben venderse mensualmente, además de las 1.000 unidades iniciales, para obtener el máximo de ingresos.

El precio por unidad es de $(200 - x)$ euros.

$Ingresos = Número\ unidades \times precio\ unitario \Rightarrow$

$\Rightarrow I(x) = (1.000 + 100x)(200 - x) = 200.000 - 1.000x + 20.000x - 100x^2 =$

$= -100x^2 + 19.000x + 200.000.$

Los ingresos serán máximos cuando se anule su primera derivada:

$I'(x) = -200x + 19.000 = 0;\ 2x = 190 \Rightarrow x = 95.$

$\underline{Para\ obtener\ el\ máximo\ beneficio\ hay\ que\ vender\ 10.500\ muebles\ al\ mes.}$

$b)$

$$I(x) = -100 \cdot 95^2 + 19.000 \cdot 95 + 200.000 =$$

$$= -100 \cdot (95^2 - 190 \cdot 95 - 2.000) = -100 \cdot (9.025 - 18.050 - 2.000) =$$

$$= -100 \cdot (9.025 - 20.050) = -100 \cdot (-11.025) = 1.102.500.$$

$$\underline{El\ benefico\ máximo\ es\ de\ 1.102.500\ euros.}$$

****

2º) Considere la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Estudie su crecimiento y, si tiene, determine y clasifique sus extremos relativos.

b) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$.

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{0-1\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

Teniendo en cuentas que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$Para\ x < 0 \Rightarrow\ f'(x) > 0\ \Rightarrow\ \underline{Crecimiento: (-\infty, 0)}.$$

$$Para\ x > 0 \Rightarrow\ f'(x) < 0\ \Rightarrow\ \underline{Decrecimiento: (0, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto. Esta condición es necesaria pero no suficiente; para que exista el máximo o mínimo es necesario que no se anule la segunda derivada en ese punto para el valor que anula la primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0;\ -2x = 0\ \Rightarrow x = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(1+x^2)^2 + 2x\cdot[2\cdot(1+x^2)\cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{-2\cdot(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{-2-2x^2+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3} =$$

$$= \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{2(0-1)}{(1+0)^3} = -2 < 0\ \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1} = 1\ \ \Rightarrow\ \ \underline{Máximo: A(0, 1)}.$$

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$m = f'(1) = \frac{-2 \cdot 1}{(1+1^2)^2} = \frac{-2}{2^2} = -\frac{1}{2}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $y = f(1) = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow P\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

La ecuación de la recta punto-pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$:

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1);\;\; 2y - 1 = -(x - 1) = -x + 1.$$

$$\underline{Recta\ tangente: t \equiv x + 2y - 2 = 0}.$$

****

3º) Sea el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x+4y-5z=6 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$.

a) Justifique si es compatible determinado.

b) Resuelva el sistema formado por las dos primeras ecuaciones.

----

a)

Las matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Un sistema es compatible determinado cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e igual al número de incógnitas.

Según lo anterior, para justificar que el sistema es compatible determinado basta con probar que el rango de la matriz de coeficientes es tres.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-3+5-4-5=-7\neq 0 \Rightarrow Rang\ A=3.$$

$$\underline{Queda\ justificado\ que\ el\ sistema\ es\ compatible\ determinado.}$$

b)

El sistema formado por las dos primeras ecuaciones es $\left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 3x+4y-5z=6 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado por ser los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada iguales e iguales a dos, que es menor que el número de incógnitas, que es tres.

Haciendo $z=\lambda$, resulta el sistema: $\left.\begin{array}{r} x-y=-\lambda \\ 3x+4y=6+5\lambda \end{array}\right\}$,

$$\left.\begin{array}{r} 4x-4y=-4\lambda \\ 3x+4y=6+5\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 7x=6+\lambda \rightarrow x=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\lambda,$$

$$y=x+\lambda=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\lambda+\lambda=\frac{6}{7}+\frac{8}{7}\lambda.$$

$$\underline{Solución: x=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\lambda, y=\frac{6}{7}+\frac{8}{7}\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

****

4º) Durante la última epidemia de Ébola se consideró que, sin intervención, el virus se propagaba aumentando en un 3 % diario el número de afectados. Suponga que en una población, hoy, hay 25 personas.

a) Escriba la fórmula de la función que da el número de personas infectadas al pasar los días. ¿Cuántas personas estarán infectadas al cabo de 20 días?

b) A partir de una fecha determinada, en esta población se aplican unas medidas sanitarias que permiten que el número de personas infectadas disminuya según la función $g(x) = 1.000 \cdot 0{,}95^x$. Si se considera controlada la epidemia cuando el número de afectados es igual o inferior a 10 personas, ¿cuántos días deberán transcurrir después de aplicar las medidas sanitarias para poder declarar controlada la epidemia?

----

a)

$$Número\ de\ infectados \Rightarrow \underline{N = 25 \cdot 1{,}03^{n-1}}.$$

$$N_{20} = 25 \cdot 1{,}03^{20-1} = 25 \cdot 1{,}03^{19} = 43{,}838.$$

$$\underline{El\ número\ más\ probable\ de\ afectados\ dentro\ de\ 20\ días\ es\ de\ 44\ personas.}$$

b)

$g(x) = 1.000 \cdot 0{,}95^x \leq 10;\ \ 100 \cdot 0{,}95^x = 1.$ Tomando logaritmos decimales:

$$2 + x \cdot \log 0{,}95 = 0 \ \Rightarrow x = \frac{-2}{\log 0{,}95} = \frac{-2}{-0{,}0223} = 89{,}78.$$

$$\underline{Deben\ transcurrir\ 90\ días.}$$

****

5º) El boleto ganador de una lotería está formado por tres números. Se sabe que la suma del primero y del segundo excede en dos unidades al tercero; que el primer número menos el doble del segundo es diez unidades menor que el tercero, y que la suma de los tres números es 24. ¿Cuál es el boleto ganador?

Sean los números $a, b\ y\ c$, respectivamente.

Del enunciado del problema se deduce el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{r} a+b=c+2 \\ a-2b+10=c \\ a+b+c=24 \end{array}\right\}$.

Restando término a término a la primera ecuación la tercera:

$a+b-(a+b+c)=c+2-24;\ -c=c-22;\ \ 2c=22 \Rightarrow c=11.$

Resolviendo ahora el sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a+b=13 \\ a-2b+10=11 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a+b=13 \\ a-2b=1 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} a+b=13 \\ -a+2b=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3b=12;\ \ b=4.$$

$a+4=13 \Rightarrow a=9.$

$\underline{Los\ números\ son\ 9, 4\ y\ 11, respectivamente.}$

****

6º) Tenemos cuatro rectas: la recta r_1 pasa por $A(-1,0)$ y $B(0,1)$; la recta r_2 pasa por $A(-1,0)$ y $C(0,-1)$; la recta r_3 pasa por $D(1,0)$ y $B(0,1)$, y la recta r_4 pasa por $D(1,0)$ y $C(0,-1)$.

$a)$ Escriba las inecuaciones que cumplen los puntos de la frontera y del interior del cuadrado que determinan estas cuatro rectas, y dibújelo.

$b)$ Determine el valor máximo de k para que la recta $y = 2x + k$ tenga algún punto en común con el cuadrilátero anterior.

$a)$

Las ecuaciones de las rectas r_1, r_2, r_3 y r_4 son las siguientes, recordando la fórmula de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$:

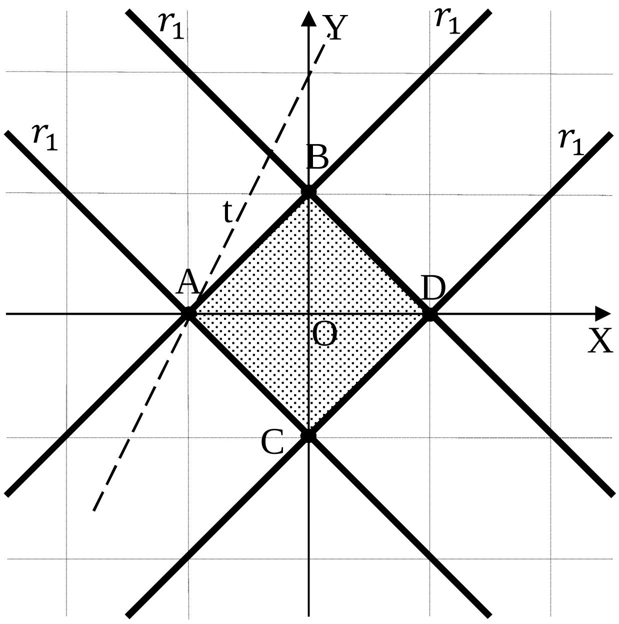
$r_1 \Rightarrow \frac{y-0}{1-0} = \frac{x+1}{0+1} \Rightarrow r_1 \equiv y = x + 1.$ $\quad$ $r_2 \Rightarrow \frac{y-0}{-1-0} = \frac{x+1}{0+1} \Rightarrow r_2 \equiv y = -x - 1.$

$r_3 \Rightarrow \frac{y-0}{1-0} = \frac{x-1}{0-1} \Rightarrow r_3 \equiv y = -x + 1.$ $\quad$ $r_4 \Rightarrow \frac{y-0}{-1-0} = \frac{x-1}{0-1} \Rightarrow r_4 \equiv y = x - 1.$

Las expresiones de las correspondientes inecuaciones de las rectas, teniendo en cuenta que todas incluyen al origen de coordenadas, son las siguientes:

$\underline{i_1 \Rightarrow y \leq x + 1}.$ $\quad$ $\underline{i_2 \Rightarrow y \geq -x - 1}.$ $\quad$ $\underline{i_3 \Rightarrow y \leq -x + 1}.$ $\quad$ $\underline{i_4 \Rightarrow y \geq x + 1}.$

La representación gráfica de la situación es la indicada en la figura adjunta.



$b)$

La recta dada, $y = 2x + k$, tiene de pendiente 2; con esta pendiente, la recta t, paralela a la anterior, que determina la mayor ordenada en el origen pasa por el punto $A(-1,0)$, como se observa en la figura.

El valor de k es el siguiente: $0 = 2 \cdot (-1) + k; \;\; 0 = -2 + k \Rightarrow k = 2.$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ k\ es\ 2\ y\ el\ punto\ es\ A(-1, 0)}.$

****