PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere la función $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & si \quad x\leq -1 \\ ax+b & si \quad -1<x<2 \\ x^2 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$. Encuentre los valores de $a\ y\ b$ para que la función sea continua para todos los valores reales.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=-1\ y\ x=2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(2x+3) = -2+3 = 1 = f(-1) \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1}(ax+b) = -a+b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow 1 = -a+b. \quad (1)$$

$$Para\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2}(ax+b) = 2a+b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4 = f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2a+b = 4. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} -a+b=1 \\ 2a+b=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} a-b=-1 \\ 2a+b=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow \underline{a=1\ y\ b=2}.$$

****

2º) Al terminar un curso de pintura, los alumnos reciben como obsequio un estuche con rotuladores y colores. Se regalan dos tipos de estuches: los rojos, que contienen 1 rotulador y 2 colores y cuestan 9 euros, y los verdes, que llevan 3 rotuladores y 1 color y cuestan 15 euros. La escuela dispone de 200 rotuladores y 100 colores para llenar los estuches. Necesita preparar al menos 40 estuches y que el número de estuches rojos no supere el número de estuches verdes; con estos datos, la escuela quiere calcular el precio que tendrá que pagar por estos estuches.

a) Determine la función de objetivos, y dibuje la región de las posibles opciones de la escuela.

b) Calcule cuantos estuches de cada tipo hay que preparar para que el gasto sea mínimo y diga cuál es ese gasto mínimo.

----

a)

Sean x e y el número de estuches rojos y verdes que se obsequian, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio son: $\left.\begin{array}{r} x+3y\le 200 \\ 2x+y\le 100 \\ x+y\ge 40 \\ x\le y \\ x\ge 0;y\ge 0 \end{array}\right\}.$

$\underline{La\ función\ de\ objetivos\ es\ f(x,y)=9x+15y.}$

① $\Rightarrow x+3y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	140	50
y	20	50

② $\Rightarrow 2x+y\le 100 \Rightarrow y\le 100-2x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	50
y	100	0

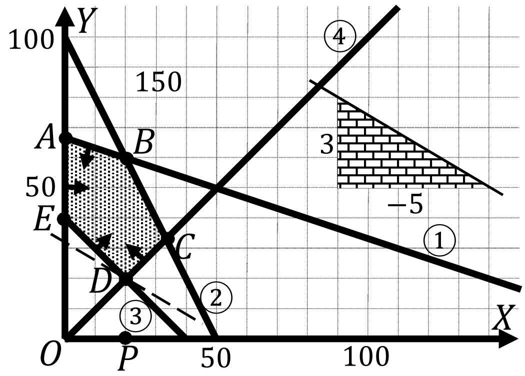
③ $\Rightarrow x+y\ge 40 \Rightarrow y\ge 40-x \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	40
y	40	0

④ $\Rightarrow x\le y \Rightarrow y\ge x \Rightarrow P(20,0)\to No.$

x	9	11
y	7	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



b)

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=200 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A\left(0,\frac{200}{3}\right).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=200 \\ 2x+y=100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+6y=400 \\ -2x-y=-100 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y=300;\ \ y=60;$

$2x+60=100;\ \ x=20 \Rightarrow B(20,60).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=100 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=100;\ \ y=x=\frac{100}{3} \Rightarrow C\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=40 \\ x=y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=40;\ \ y=x=20 \Rightarrow D(20,20).$$

$$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=40 \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow E(0,40).$$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f\left(0,\frac{200}{3}\right)=9\cdot 0+15\cdot\frac{200}{3}=0+1.000=1.000.$$

$$B \Rightarrow f(20,60)=9\cdot 20+15\cdot 60=180+900=1.080.$$

$$C \Rightarrow f\left(\frac{100}{3},\frac{100}{3}\right)=9\cdot\frac{100}{3}+15\cdot\frac{100}{3}=300+500=800.$$

$$D \Rightarrow f(20,20)=9\cdot 20+15\cdot 20=180+300=480.$$

$$E \Rightarrow f(0,40)=9\cdot 0+15\cdot 40=0+600=600.$$

El valor mínimo se produce en el punto $D(20,20)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=9x+15y=0 \Rightarrow y=-\frac{9}{15}x=-\frac{3}{5}x \Rightarrow m=-\frac{3}{5}.$$

$$\underline{El\ gasto\ es\ mínimo\ preparando\ 20\ estuches\ de\ cada\ tipo.}$$

$$\underline{El\ gasto\ mínimo\ es\ de\ 480\ euros.}$$

****

3º) Un inversor ha obtenido un beneficio de 1.500 euros tras invertir un total de 40.000 euros en tres empresas diferentes. Estos beneficios se desglosan de la siguiente manera: la cantidad invertida en la empresa A le ha reportado un 2 % de beneficios, la cantidad invertida en la empresa B, un 5 %, y la cantidad invertida en la empresa C, un 7 %. El dinero invertido en la empresa B ha sido el mismo que en las otras dos empresas juntas. ¿Cuál fue la cantidad invertida en cada una de las empresas?

Sean x, y, z las inversiones que se realiza el inversor en las empresas A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=40.000 \\ 0{,}02x+0{,}05y+0{,}07z=1.500 \\ y=x+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=40.000 \\ 2x+5y+7z=150.000 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}.$$

Restando miembro a miembro a la primera la tercera ecuación:

$2y=40.000 \Rightarrow y=20.000.$

$$\left.\begin{array}{r} x+20.000+z=40.000 \\ 2x+5\cdot 20.000+7z=150.000 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+z=20.000 \\ 2x+7z=50.000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} -2x-2z=-40.000 \\ 2x+7z=50.000 \end{array}\right\} \Rightarrow 5z=10.000;\ \ z=2.000.$$

$x+y+z=40.000;\ \ x+20.000+2.000=40.000;\ \ x=18.000.$

$\underline{Invirtió\ 18.000\ euros\ en\ A, 20.000\ euros\ en\ B\ y\ 2.000\ euros\ en\ C.}$

****

4º) El gasto mensual en tabaco de un fumador viene determinado por su salario mediante la función $f(x)=\frac{400x}{x^2+4}$, en la que x representa el salario en miles de euros y $f(x)$ el gasto mensual en tabaco en euros.

a) Determine el salario para el que el gasto en tabaco es máxima. ¿A cuánto asciende este gasto?

b) ¿Para qué salarios el gasto mensual es inferior a 60 euros?

----

a)

Para que una función tenga un máximo es condición necesaria que se anule su primera derivada y, además, que sea negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x)=\frac{400\cdot(x^2+4)-400x\cdot 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{400x^2+1.600-800x^2}{(x^2+4)^2}=\frac{1.600-400x^2}{(x^2+4)^2}=400\cdot\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 400\cdot\frac{4-x^2}{(x^2+4)^2}=0;\ \ 4-x^2=0.$$

Como el salario no puede ser negativo, la solución lógica es $x=2$.

$$f''(x)=400\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+4)^2-(4-x^2)[2(x^2+4)\cdot 2x]}{(x^2+4)^4}=400\cdot\frac{-2x\cdot(x^2+4)-4x\cdot(4-x^2)}{(x^2+4)^3}=$$

$$=400\cdot\frac{-2x^3-8x-16x+4x^3}{(x^2+4)^3}=400\cdot\frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}=800x\cdot\frac{x^2-12}{(x^2+4)^3}.$$

$$f''(2)=800\cdot 2\cdot\frac{2^2-12}{(2^2+4)^3}=-\frac{1.600\cdot 8}{8^3}<0\Rightarrow \text{Justificación de máximo.}$$

$\underline{El\ gasto\ en\ tabaco\ es\ máximo\ cuando\ el\ salario\ es\ de\ 2.000\ euros.}$

$$f(2)=\frac{400\cdot 2}{2^2+4}=\frac{800}{8}=100.$$

$\underline{El\ gasto\ máximo\ en\ tabaco\ es\ de\ 100\ euros.}$

b)

$$f(x)<60\Rightarrow\frac{400x}{x^2+4}<60;\ \ \frac{20x}{x^2+4}<3;\ \ 20x<3x^2+12;\ 3x^2-20x+12<0.$$

$$3x^2-20x+12=0;\ \ x=\frac{20\pm\sqrt{400-144}}{6}=\frac{20\pm\sqrt{256}}{6}=\frac{20\pm 16}{6}\Rightarrow x_1=\frac{2}{3}, x_2=6.$$

$$3x^2-20x+12=3\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-6)=(3x-2)(x-6).$$

$$(3x-2)(x-6)<0 \Rightarrow \frac{2}{3}<x<6.$$

$\underline{El\ gasto\ es\ menor\ de\ 60\ euros\ cuando\ el\ salario\ es\ 667<x<6.000,euros.}$

****

5º) Resuelve las siguientes preguntas:

a) Encuentre las matrices A y B que cumplen que $A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}$ y $2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}$.

b) Determine los valores de a, b, c y d para que se verifique la siguiente igualdad: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}$.

----

a)

$$\left.\begin{array}{r}A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}-2A+4B=\begin{pmatrix}-2 & -26\\ 0 & 10\end{pmatrix}\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 7B=\begin{pmatrix}0 & -35\\ 7 & 14\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{B=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}}.$$

$$\left.\begin{array}{r}A-2B=\begin{pmatrix}1 & 13\\ 0 & -5\end{pmatrix}\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}2 & -9\\ 7 & 4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \left.\begin{array}{r}3A-6B=\begin{pmatrix}3 & 39\\ 0 & -15\end{pmatrix}\\ 4A+6B=\begin{pmatrix}4 & -18\\ 14 & 8\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow 7A=\begin{pmatrix}7 & 21\\ 14 & -7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\underline{A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}}.$$

b)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & c\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}4 & c-8\\ 2 & ac-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b & -5\\ d & -7\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r}4=b\\ c-8=-5\\ d=2\\ a\cdot c-4=-7\end{array}\right\}\Rightarrow c=3;\ \ a\cdot 3-4=-7;\ \ 3a=-3;\ \ a=-1.$$

$$\underline{a=-1, b=4, c=3, d=2}.$$

****

6º) Sabemos que la función $f(x)=\frac{ax+b}{cx+1}$ pasa por el punto $P(2,-5)$ y que las rectas $x=1$ e $y=2$ son las asíntotas vertical y horizontal, respectivamente. Calcule los valores de a, b y c.

Por ser la recta $x=1$ asíntota horizontal es $cx+1=x-1 \Rightarrow \underline{c=-1}$.

La función resulta $f(x)=\frac{ax+b}{1-x}$.

Por ser la recta $y=2$ asíntota vertical es $\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{1-x}=2 \Rightarrow \underline{a=-2}$.

La función resulta $f(x)=\frac{-2x+b}{1-x}$.

Por pasar por el punto $P(2,-5)$ es $f(2)=-5$.

$f(2)=-5 \Rightarrow \frac{-2\cdot 2+b}{1-2}=-5;\ -4+b=5 \Rightarrow \underline{b=9}$.

****