PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadora, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) En un estudio de mercado, 500 participantes han probado tres cafés diferentes, presentados como producto A, producto B y producto C, y han elegido cuál de los tres les ha gustado más. Sabemos que el producto B ha sido elegido por el doble de personas que el producto A y que el producto B lo han elegido 32 personas más que los que han elegido los productos A y C juntos. Calcule cuantas personas han elegido cada producto.

Sean x, y, z los participantes que eligen los productos A, B y C, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=500 \\ y=2x \\ y-32=x+z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=500 \\ 2x-y=0 \\ x-y+z=-32 \end{array}\right\}.$$

Restando a la primera ecuación la tercera: $2y=532;\ \ y=266.$

Sustituyendo el valor de y en la segunda ecuación: $2x-266=0;\ \ x=133.$

$133+266+z=500;\ \ 399+z=500;\ \ z=101.$

$\underline{Han\ elegido\ el\ producto\ A\ 133\ participantes, el\ B, 266\ y\ el\ C, 101}.$

****

2º) Resuelva las cuestiones siguientes:

a) Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Calcule los valores de a y b para que se verifique la igualdad $M^2 + a \cdot M + b \cdot I = O$, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Halle todas las matrices B que conmuten con la matriz A, es decir, que se cumpla $A \cdot B = B \cdot A$.

----

a)

$$M^2 + a \cdot M + b \cdot I = O;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a & 5a \\ 2a & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 14 + 2a + b & 5 + 5a \\ 2 + 2a & 11 - a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a + b = -14 \\ 5 + 5a = 0 \\ 2 + 2a = 0 \\ a - b = 11 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{a = -1, b = -12}.$$

b)

Sea $B = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ m - p & n - q \end{pmatrix}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m - n \\ q & p - q \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} p & q \\ m - p & n - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & m - n \\ q & p - q \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} p = n \\ q = m - n \\ m - p = q \\ n - q = p - q \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} n = p \\ m - p = q \end{matrix}\right\}.$$

$$\underline{Las\ matrices\ B\ son\ de\ la\ forma\ B = \begin{pmatrix} m & n \\ n & m - n \end{pmatrix}}.$$

Ejemplos: $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ o $B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$.

Comprobación:

$$A \cdot B_1 = B_1 \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B_2 = B_2 \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

****

3º) La gráfica de la función $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ pasa por el punto $P(-2, -6)$ y la recta tangente en este punto es paralela al eje de abscisas.

a) Calcule el valor de a. b) Calcule el valor de b.

----

a)

Por ser la recta tangente el eje de abscisas es $m = f'(-2) = 0$:

$f'(x) = a - \frac{8}{x^2}$.

$m = f'(-2) = 0 \Rightarrow a - \frac{8}{(-2)^2} = 0;\ \ a - \frac{8}{4} = 0 \Rightarrow \underline{a = 2}$.

b)

La función resulta $f(x) = 2x + b + \frac{8}{x}$.

Por pasar $f(x)$ por el punto $P(-2, -6)$ es $f(-2) = -6$:

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + b + \frac{8}{-2} = -6;\ -4 + b - 4 = -6 \Rightarrow \underline{b = 2}$.

****

4º) La función $f(x) = \frac{40}{x^2-22x+125}$ muestra aproximadamente la venta diaria, en miles de unidades, de un perfume de moda en función de x, en que x es el día del mes de febrero.

a) ¿Cuántas unidades se van a vender, aproximadamente, el día 5 de febrero? ¿Cuál es el incremento de ventas entre el día 7 y el día 9 de febrero?

b) ¿Qué día del mes de febrero se venden más perfumes y cuántas unidades se van a vender?

----

a)

$$f(5) = \frac{40}{5^2-22\cdot5+125} = \frac{40}{25-110+125} = \frac{40}{150-110} = \frac{40}{40} = 1.$$

$$\underline{El\ 5\ de\ febrero\ se\ venderán\ 1.000\ perfúmenes.}$$

$$f(7) = \frac{40}{7^2-22\cdot7+125} = \frac{40}{49-154+125} = \frac{40}{174-154} = \frac{40}{20} = 2.$$

$$f(9) = \frac{40}{9^2-22\cdot9+125} = \frac{40}{81-198+125} = \frac{40}{206-198} = \frac{40}{8} = 5.$$

$$f(9) - f(5) = 5 - 2 = 3.$$

$$\underline{El\ incremento\ entre\ los\ días\ 7\ y\ 9\ de\ febrero\ fue\ de\ 3.000\ unidades.}$$

b)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativo el valor de la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = \frac{-40\cdot(2x-22)}{(x^2-22x+125)^2} = -80 \cdot \frac{x-11}{(x^2-22x+125)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -80 \cdot \frac{x-11}{(x^2-22x+125)^2} = 0;\ \ x - 11 = 0 \Rightarrow x = 11.$$

$$f''(x) = \frac{-40\cdot(2x-22)}{(x^2-22x+125)^2} = -80\frac{1\cdot(x^2-22x+125)^2-(x-11)\cdot[2\cdot(x^2-22x+125)\cdot(2x-22)]}{(x^2-22x+125)^4} =$$

$$= -80 \cdot \frac{x^2-22x+125-(x-11)\cdot2\cdot(2x-22)}{(x^2-22x+125)^3} = -80 \cdot \frac{x^2-22x+125-4\cdot(x-11)^2}{(x^2-22x+125)^3} =$$

$$= -80 \cdot \frac{x^2-22x+125-4\cdot(x^2-22x+121)}{(x^2-22x+125)^3} = -80 \cdot \frac{x^2-22x+125-4x^2+88x-484}{(x^2-22x+125)^3} =$$

$$= -80 \cdot \frac{-3x^2+66x-359}{(x^2-22x+125)^3} = 80 \cdot \frac{3x^2-66x+359}{(x^2-22x+125)^3}.$$

$$f''(11)=80\cdot\frac{3\cdot 11^2-66\cdot 11+359}{(11^2-22\cdot 11+125)^3}=80\cdot\frac{363-726+359}{(121-242+125)^3}=80\cdot\frac{722-726}{(245-242)^3}=$$

$$=80\cdot\frac{-4}{3^3}=-\frac{320}{27}<0\Rightarrow Justificación\ de\ que\ se\ trata\ de\ un\ máximo.$$

$\underline{El\ día\ 11\ de\ febrero\ es\ el\ que\ se\ venden\ más\ unidades\ de\ perfume}.$

$$f(11)=\frac{40}{11^2-22\cdot 11+125}=\frac{40}{121-242+125}=\frac{40}{246-242}=\frac{40}{4}=10.$$

$\underline{El\ dia\ 11\ de\ febrero\ se\ vendieron\ 10.000\ unidades\ de\ perfume}.$

****

5º) En una fábrica se dispone de 80 kg de acero y 120 kg de aluminio para fabricar bicicletas de montaña y de paseo, que se venderán a 200 euros y 150 euros, respectivamente. Para fabricar una bicicleta de montaña son necesarios 1 kg de acero y 3 kg de aluminio, y para fabricar una bicicleta de paseo, 2 kg de cada uno de los dos metales.

a) Determine la función de objetivos y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) Calcule cuantas bicicletas de cada tipo se han de fabricar para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.

----

a)

Sean x e y el número de bicicletas de montaña y de paseo que se fabrican, respectivamente.

Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} x+2y \le 80 \\ 3x+2y \le 120 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow x+2y \le 80 \Rightarrow y \le \frac{80-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

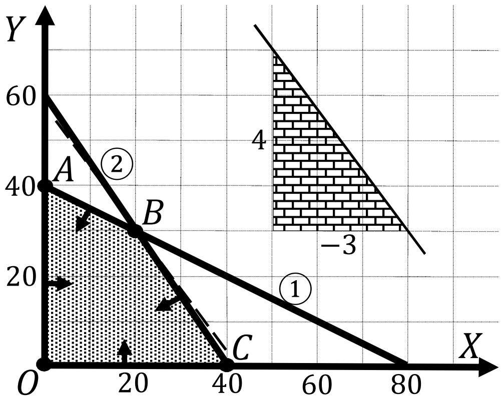
x	80	0
y	0	40

② $\Rightarrow 3x+2y \le 120 \Rightarrow y \le \frac{120-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	60	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=80 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-80 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x=40;\ \ x=20;\ \ y=30 \Rightarrow B(20,30).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=120;\ \ x=40 \Rightarrow C(40,0).$

b)

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=200x+150y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40)=200\cdot 0+150\cdot 40=0+6.000=6.000.$

$B \Rightarrow f(20, 30) = 200 \cdot 20 + 150 \cdot 30 = 4.000 + 4.500 = 8.500.$

$C \Rightarrow f(40, 0) = 200 \cdot 40 + 150 \cdot 0 = 8.000 + 0 = 8.000.$

El máximo se produce en el punto $B(20, 30)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(20, 30)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 200x + 150y = 0 \Rightarrow y = -\frac{200}{150}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obtiene\ fabricando\ 20\ de\ montaña\ y\ 30\ de\ paseo.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 8.500\ euros.}$$

****

6º) Una tienda abre al público desde las 10 horas hasta las 21 horas. Sabemos que los ingresos por ventas, en función de la hora del día, vienen dado por la siguiente función: $I(t) = -5(m-t)^2 + n$, para $10 \leq t \leq 21$.

a) Halle el valor de m sabiendo que los ingresos máximos se producen a las 18 horas.

b) Halle el valor de n sabiendo que a las 21 horas hay unos ingresos de 500 euros.

----

a)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$I'(t) = -10 \cdot (m-t) \cdot (-1) = 10(m-t)$.

$I''(t) = -10 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ t \in R$.

$I'(18) = 0 \Rightarrow 10(m-18) = 0 \Rightarrow \underline{m = 18}$.

b)

La función resulta $I(t) = -5(18-t)^2 + n$.

$I(21) = 500 \Rightarrow -5 \cdot (18-21)^2 + n = 500;\ \ -5 \cdot (-3)^2 + n = 500;$

$-5 \cdot 9 + n = 500;\ -45 + n = 500 \Rightarrow \underline{n = 545}$.

****