PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

EXTRAORDINARIA – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) La tabla adjunta muestra los ingresos, en miles de euros, de una tienda que dispone de tres locales, durante los meses de enero, febrero y marzo de 2.020.

	Enero	Febrero	Marzo
Local 1	13,5	13,2	4,2
Local 2	11	12,5	3,8
Local 3	15	14	2,7

Hemos recogido la información anterior en la matriz A, en el que cada fila indica un local y cada columna el mes correspondiente.

$$A = \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix}.$$

a) Considere los vectores $\vec{v} = (1 \quad 1 \quad 1)$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Haga las siguientes operaciones: $\vec{v} \cdot A$ y $A \cdot \vec{w}$. Interprete en cada caso el resultado obtenido.

b) La matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix}$ recoge los resultados del trimestre siguiente, es decir, los ingresos correspondientes a los meses de abril, mayo y junio de 2.020. Desconocemos el dato correspondiente al mes de junio del local 3, que hemos denominado x, pero sabemos que el rango de la matriz B es 2. Encuentre el valor de x.

----

a)

$$\vec{v} \cdot A = (1 \quad 1 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 13,5 & 13,2 & 4,2 \\ 11 & 12,5 & 3,8 \\ 15 & 14 & 2,7 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\vec{v} \cdot A = (39,5 \quad 39,7 \quad 10,7)}.$$

$$\underline{\vec{v} \cdot A \Rightarrow Ingreso\ total\ de\ los\ tres\ locales\ en\ enero, febrero\ y\ marzo.}$$

$$A \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 13{,}5 & 13{,}2 & 4{,}2 \\ 11 & 12{,}5 & 3{,}8 \\ 15 & 14 & 2{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} 30{,}9 \\ 27{,}3 \\ 31{,}7 \end{pmatrix}}.$$

$$\underline{A \cdot \vec{w} \Rightarrow Ingreso\ total\ de\ cada\ local\ los\ meses\ de\ enero, febrero\ y\ marzo.}$$

$b)$

$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ B \geq 2$ por contener el menor $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo cual, el rango de B es 2 cuando su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 5 \\ 4 & 11 & x \end{vmatrix} = 0;\ \ 14x + 88 + 120 - 112 - 110 - 12x = 0;$$

$2x + 208 - 222 = 0;\ \ 2x - 14 = 0;\ \ x - 7 = 0 \Rightarrow \underline{x = 7}.$

****

2º) Filomena hace una fiesta e invita a amigos a comer un pastel. Ha ido a la tienda y ha comprado una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno. La fiesta ha sido un éxito y decide repetir el encuentro y volver a hacer el pastel. Vuelve a la tienda y compra otra docena de huevos y dos bolsas de harina de almendra. Pero una vez en casa se da cuenta que no tiene nada de azúcar. Vuelve a la tienda y compra un paquete de azúcar moreno y también otra docena de huevos. La primera compra le costó 6 euros, la segunda 6,5 euros y la tercera, 3,5 euros.

a) Plantee un sistema de ecuaciones con los datos del problema.

b) Calcule el precio de una docena de huevos, de una bolsa de harina de almendra y de un paquete de azúcar moreno.

----

a)

Sean x, y, z los precios de una docena de huevos, una bolsa de harina de almendra y un paquete de azúcar moreno, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ x+2y=6{,}5 \\ x+z=3{,}5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ 2x+4y=13 \\ 2x+2z=7 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 13 \\ 2 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to -F_3\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow 2y = 5 \Rightarrow y = \tfrac{5}{2} = 2{,}5.$$

$$5 - 2z = 1; \quad 2z = 4 \Rightarrow z = 2. \qquad x + 2{,}5 + 2 = 6 \Rightarrow x = 1{,}5.$$

$$\underline{La\ docena\ de\ huevos\ cuesta\ 1{,}5\ euros.}$$

$$\underline{La\ bolsa\ de\ harina\ de\ almendras\ cuesta\ 2{,}5\ euros.}$$

$$\underline{El\ paquete\ de\ azúcar\ moreno\ cuesta\ 2\ euros.}$$

****

3º) Un restaurante que acaba de abrir quiere poner anuncios en la radio y la televisión locales durante una semana para darse a conocer y aumentar así el número de clientes. Tiene un presupuesto máximo de 18.000 euros. Cada anuncio en la radio cuesta 1.000 euros y el contrato prevé que como mínimo hay hacer 3. Cada anuncio en la televisión Cuesta 3.000 euros y, por disponibilidad de programación, se pueden hacer como máximo 4. Se estima que cada anuncio en la radio supone un incremento de 10 clientes para el restaurante y que cada anuncio en la televisión supone un incremento de 60 clientes.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) Calcule cuántos anuncios deberá poner en la radio y cuántos en la televisión para que el número de clientes nuevos sea máximo. ¿Cuántos clientes nuevos obtendrá?

----

a)

Sean x e y el número de anuncios de radio y televisión que realiza el restaurante, respectivamente.

La función de objetivos es: $\underline{f(x,y) = 10x + 60y}$.

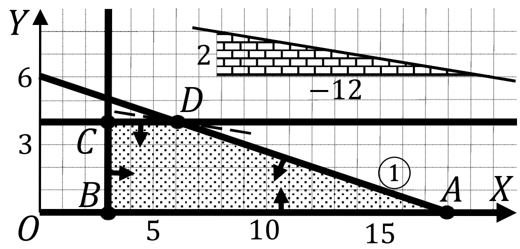
Las restricciones son: $\left.\begin{array}{r} 1.000x + 3.000y \leq 18.000 \\ x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 3y \leq 18 \\ x \geq 3 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow x + 3y \leq 18 \Rightarrow y \leq \frac{18-x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	18
y	6	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + 3y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow A(18,0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow B(3,0).$ $\quad C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(3,4).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 4 \\ x + 3y = 18 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 12 = 18;\;\; x = 6 \Rightarrow D(6,4).$

b)

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(18,0) = 10 \cdot 18 + 60 \cdot 0 = 180 + 0 = 180.$

$B \Rightarrow f(3,0) = 10 \cdot 3 + 60 \cdot 0 = 30 + 0 = 30.$

$C \Rightarrow f(3,4) = 10 \cdot 3 + 60 \cdot 4 = 30 + 240 = 270.$

$D \Rightarrow f(6,4) = 10 \cdot 6 + 60 \cdot 4 = 60 + 240 = 300.$

El valor máximo se produce en el punto $D(6,4)$.

También se hubiera obtenido el punto D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 10x + 60y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{60}x = -\frac{1}{6}x \Rightarrow m = -\frac{2}{12}.$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ con\ 6\ anuncios\ en\ radio\ y\ 4\ en\ televisión.}$

$\underline{El\ máximo\ número\ de\ nuevos\ clientes\ es\ 300}.$

****

4º) La función $C(t)=3-\frac{1}{t^2-4t+5}$, donde t son los años transcurridos y $C(t)$ la cantidad de clientes, expresada en miles, modeliza la evolución de una empresa que ha entrado en crisis.

a) Calcular cuántos clientes tenía la empresa en el momento inicial y cuántos tenía al terminar el primer año.

b) Hallar el instante en que la empresa deja de perder clientes y calcular cuántos clientes tiene en este instante.

c) Calcule cuánto tiempo tendrá que pasar para que la empresa logre tener de nuevo el mismo número de clientes que en el momento de iniciar el estudio.

----

a)

$$C(0)=3-\frac{1}{0^2-4\cdot 0+5}=3-\frac{1}{5}=\frac{14}{5}=2{,}8.$$

$$\underline{En\ el\ momento\ inicial\ la\ empresa\ tenía\ 2.800\ clientes.}$$

$$C(1)=3-\frac{1}{1^2-4\cdot 1+5}=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5.$$

$$\underline{Al\ terminar\ el\ primer\ año\ la\ empresa\ tenía\ 2.500\ clientes.}$$

b)

Una función tiene un mínimo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para el valor que anula la primera.

$$C'(t)=0-\frac{-(2t-4)}{(t^2-4t+5)^2}=\frac{2\cdot(t-2)}{(t^2-4t+5)^2}=0\Rightarrow 2\cdot(t-2)=0;\ \ t=2.$$

$$C''(t)=\frac{2\cdot(t^2-4t+5)^2-2\cdot(t-2)\cdot[2\cdot(t^2-4t+5)\cdot(2t-4)]}{(t^2-4t+5)^4}=\frac{2\cdot(t^2-4t+5)-8\cdot(t-2)^2}{(t^2-4t+5)^3}=$$

$$=\frac{2t^2-8t+10-8\cdot(t^2-4t+4)}{(t^2-4t+5)^3}=\frac{2t^2-8t+10-8t^2+32t-32}{(t^2-4t+5)^3}=\frac{-6t^2+24t-22}{(t^2-4t+5)^3}=\frac{-2\cdot(3t^2-12t+11)}{(t^2-4t+5)^3}.$$

$$C''(2)=\frac{-2\cdot(3\cdot 2^2-12\cdot 2+11)}{(2^2-4\cdot 2+5)^3}=\frac{-2\cdot(-1)}{1^3}>0\Rightarrow Mínimo\ para\ t=2.$$

$$C(2)=3-\frac{1}{2^2-4\cdot 2+5}=3-\frac{1}{1}=2.$$

$$\underline{Deja\ de\ perder\ clientes\ a\ los\ 2\ años\ y\ tenía\ 2.000\ clientes.}$$

c)

$$C(t)=2{,}8\Rightarrow 3-\frac{1}{t^2-4t+5}=2{,}8;\ \ 0{,}2=\frac{1}{t^2-4t+5};\ \ 1=\frac{5}{t^2-4t+5}\Rightarrow$$

$t^2 - 4t + 5 = 5;\ \ t^2 - 4t = 0;\ \ t(t - 4) = 0 \Rightarrow t_1 = 0\ (comienzo), t_2 = 4.$

$\underline{Para\ tener\ los\ clientes\ del\ comienzo\ ha\ de\ pasar\ 4\ \text{años}.}$

****

5º) Una empresa pone a la venta un producto que distribuye en cajas. El beneficio B obtenido por la empresa, expresado en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión: $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, siendo $x > 0$, es el precio de venta de cada caja, expresado en euros.

a) ¿Qué beneficio obtendrá si el precio de venta de cada caja es de 6 euros? ¿Entre qué valores tiene que fijar el precio de venta de cada caja para obtener beneficios?

b) ¿A qué precio ha de vender cada caja para que el beneficio sea el mayor posible? ¿Cuál es este beneficio máximo?

----

a)

$$B(6) = -6^2 + 16 \cdot 6 - 55 = -36 + 96 - 55 = 96 - 91 = 5.$$

$$\underline{Si\ vende\ la\ caja\ a\ 6\ euros\ obtiene\ un\ beneficio\ de\ 5.000\ euros.}$$

La función beneficios, $B(x) = -x^2 + 16x - 55$, es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2; sus puntos de corte con el eje de abscisas son los siguientes:

$$B(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 16x - 55 = 0;\ \ x^2 - 16x + 55 = 0;\ \ x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 220}}{2} =$$

$$= \frac{16 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{16 \pm 6}{2} = 8 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 11.$$

$$\underline{Para\ obtener\ beneficios\ tiene\ que\ vender\ la\ caja\ entre\ 5\ y\ 11\ euros.}$$

b)

$$B'(x) = -2x + 16.$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 16 = 0;\ \ x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8.$$

$$B''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 8.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ la\ caja\ a\ 8\ euros.}$$

$$B(8) = -8^2 + 16 \cdot 8 - 55 = -64 + 128 - 55 = 128 - 119 = 9.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 9.000\ euros}$$

****

6º) Considere la función $f(x) = px^3 - 4x^2 + 7px - 18$.

a) Calcule cuál ha de ser el valor del parámetro p para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas.

b) Escriba la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ para el valor de $p = 2$.

----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 3px^2 - 8x + 7p.$$

$$Para\ x = 1 \Rightarrow m_1 = f'(1) = 3p \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 + 7p \Rightarrow m_1 = 10p - 8.$$

$$Para\ x = 3 \Rightarrow m_2 = f'(3) = 3p \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 7p \Rightarrow m_2 = 34p - 24.$$

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, por lo cual: $m_1 = m_2$.

$$m_1 = m_2 \Rightarrow 10p - 8 = 34p - 24;\ \ 24p = 16;\ \ 3p = 2 \Rightarrow \underline{p = \tfrac{2}{3}}.$$

b)

Para $p = 2$ la función es $f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 14x - 18$ y la función derivada es la siguiente: $f'(x) = 6x^2 - 8x + 14$.

El punto de tangencia es:

$$f(3) = 2 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 14 \cdot 3 - 18 = 54 - 36 + 42 - 18 = 96 - 54 =$$

$$= 42 \Rightarrow P(3, 42).$$

La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(3) = 6 \cdot 3^2 - 8 \cdot 3 + 14 = 54 - 24 + 14 \Rightarrow m = 44.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(3, 42)$:

$$y - 42 = 44 \cdot (x - 3) = 44x - 132.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 44x - y - 90 = 0}.$$

****