PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2021

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) Una fábrica estima que el beneficio mensual, en miles de euros, por cada tonelada de confeti vendida viene dada por la función $f(x) = \frac{-0{,}2\cdot x^2+5x-20}{x}$, donde x representa el número de toneladas de confeti vendidas.

a) Determine en qué intervalo de valores se debe encontrar la variable x para que la fábrica no tenga pérdidas.

b) Calcular la cantidad de toneladas de confeti que proporciona el beneficio máximo y di cuál es éste beneficio.

---

a)

Se trata de que $f(x) \geq 0$. Como quiera que $x \geq 0$, la función $f(x)$ será positiva o negativa cuando lo sea su numerador.

$$-0{,}2 \cdot x^2 + 5x - 20 = 0;\ \ x^2 - 25x + 100 = 0;\ \ x = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{2} =$$

$$= \frac{25 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{25 \pm 15}{2} \Rightarrow x_1 = 5, x_2 = 20.$$

Considerando la función $g(x) = -0{,}2 \cdot x^2 + 5x - 20$, que es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, y que corta al eje de abscisas en los puntos $x_1 = 5\ y\ x_2 = 20$, por lo cual:

$$\underline{Para\ que\ la\ función\ f(x)\ no\ tenga\ pérdidas\ tiene\ que\ ser\ x \in [5, 20]}.$$

b)

El beneficio será máximo cuando se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$f'(x) = \frac{(-0{,}4\cdot x+5)\cdot x-(-0{,}2\cdot x^2+5x-20)\cdot 1}{x^2} = \frac{-0{,}4\cdot x^2+5x+0{,}2\cdot x^2-5x+20}{x^2} = \frac{-0{,}2\cdot x^2+20}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-0{,}2\cdot x^2+20}{x^2} = 0;\ \ -0{,}2\cdot x^2 + 20 = 0;\ \ 0{,}2\cdot x^2 = 20;\ \ x^2 = 100;$$

$x = \pm\sqrt{100} = \pm 10 \Rightarrow x = 10$. La solución negativa no tiene sentido.

$$f''(x) = \frac{-0{,}4x\cdot x^2-(-0{,}2x^2+20)\cdot 2x}{x^4} = \frac{-0{,}4x^2+0{,}4x^2-40}{x^3} = \frac{-40}{x^3}.$$

$$f''(10) = \frac{-40}{10^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 10.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 10\ toneladas\ mensuales\ de\ confeti.}$

$$f(10) = \frac{-0{,}2\cdot 10^2+5\cdot 10-20}{10} = \frac{-20+50-20}{10} = \frac{10}{10} = 1.$$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ mensual\ es\ de\ 1.000\ euros.}$

****

2º) En una pastelería quieren preparar cajitas de panellets para obsequiar a los mejores clientes durante la semana de la Castañada. En total disponen de 120 panellets de piñones y de 150 panellets de coco. Quieren preparar cajitas de dos tipos: las del primer tipo contendrán 3 panellets de piñones y 2 de coco, y las del segundo tipo contendrán 4 bollos de piñones y 6 de coco. La idea de la pastelería es preparar el número máximo de cajitas posible con los panellets de que disponen teniendo en cuenta que, como mínimo, deben preparar 9 cajitas de cada tipo.

a) Determine la función de objetivos y las restricciones. Dibuje la región factible.

b) Determine cuantas cajitas hay que preparar de cada tipo para hacer el máximo número de obsequios posible. Indique si, en este caso, se utilizarán todos los panellets disponibles y, si no es así, cuántos sobrarán de cada tipo.

Sean x e y el número de cajitas de los tipos primero y segundo que se preparan en la pastelería, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+4y \le 120 \\ 2x+6y \le 150 \\ x \ge 9;\ y \ge 9 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} 3x+4y \le 120 \\ x+3y \le 75 \\ x \ge 9;\ y \ge 9 \end{array}\right\}$.

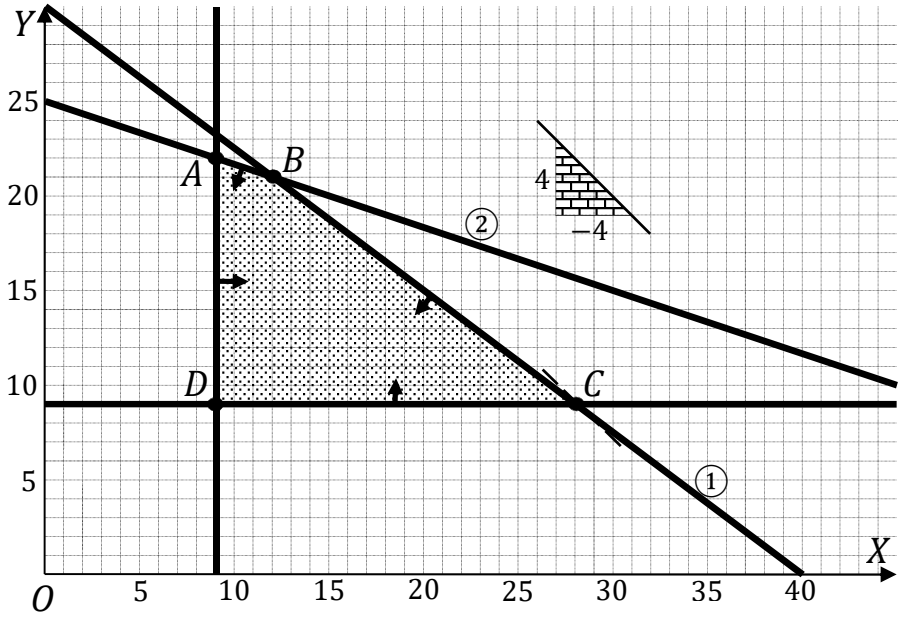
① $\Rightarrow 3x+4y \le 120 \Rightarrow y \le \frac{120-3x}{4} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	40
y	30	0

② $\Rightarrow x+3y \le 75 \Rightarrow y \le \frac{75-x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	30	0
y	15	25

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



La función de objetivos es la mayor suma de cajitas, o sea: $\underline{f(x,y) = x+y}$.

Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 9 \\ x + 3y = 75 \end{array}\right\} \Rightarrow 9 + 3y = 75;\ \ 3y = 66;\ \ y = 22 \Rightarrow A(9, 22).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 4y = 120 \\ x + 3y = 75 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x - 4y = -120 \\ 3x + 9y = 225 \end{array}\right\} \Rightarrow 5y = 105;\ \ y = 21;$$

$x + 63 = 75;\ \ x = 12 \Rightarrow B(12, 21).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 9 \\ 3x + 4y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x + 36 = 120;\ \ 3x = 84;\ \ x = 28 \Rightarrow C(28, 9).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 9 \\ y = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow D(9, 9).$$

b)

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(9, 22) = 9 + 22 = 31.$ $\qquad$ $B \Rightarrow f(12, 21) = 12 + 21 = 33.$

$C \Rightarrow f(28, 9) = 28 + 9 = 37.$ $\qquad$ $D \Rightarrow f(9, 9) = 9 + 9 = 18.$

El valor máximo se produce en el punto $C(29, 9)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x = -\frac{4}{4}x \Rightarrow m = \frac{4}{-4}.$$

$\underline{El\ máximo\ rendimiento\ es\ preparando\ 29\ cajitas\ del\ 1^{er}\ tipo\ y\ 9\ del\ 2^{0}.}$

$Piñones: 120 - (28 \cdot 3 + 9 \cdot 4) = 120 - (84 + 36) = 120 - 120 = 0.$

$Coco: 150 - (28 \cdot 2 + 9 \cdot 6) = 150 - (56 + 54) = 150 - 110 = 40.$

$\underline{De\ piñones\ no\ sobra\ ninguno\ y\ de\ coco\ sobran\ 40\ panellets.}$

****

3º) En una fiesta familiar se han reunido 20 personas. Si contamos el total de hombres y mujeres juntos, observamos que hay el triple que de niños. Además, sabemos que, si hubiera asistido una mujer más, el número de mujeres habría sido igual que el número de hombres.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántos hombres, cuántas mujeres y cuántos niños asistieron a la fiesta.

b) Resuelve el sistema del apartado anterior e interprete el resultado.

Sean x, y, z el número de hombres, mujeres y niños que asisten a la fiestas familiar, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ x+y&=3z\\ y+1&=x \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} x+y+z&=20\\ x+y-3z&=0\\ x-y&=1 \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 20 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-3-1-60}{-1-3-1-3}=\frac{-64}{-8}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 20 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{1-60+3}{-8}=\frac{4-60}{-8}=\frac{-56}{-8}=7.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 20\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{1-20-20-1}{-8}=\frac{-40}{-8}=5.$$

$$\underline{En\ la\ fiesta\ había\ 8\ hombres, 7\ mujeres\ y\ 5\ niños.}$$

****

4º) Un granjero va a construir un corral rectangular para sus conejos. Sabemos que sólo dispone de 40 m lineales de valla metálica.

a) Llamamos x a la anchura del corral e y a la longitud. Escribe la función que permite calcular el área del corral teniendo en cuenta sólo la anchura x.

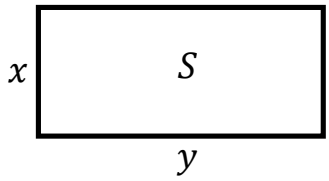
b) Calcula en qué punto alcanza su máximo la función que ha encontrado en el apartado anterior. Deducir cuál debe ser la anchura x y cuál la longitud y para que el corral tenga el área máxima. ¿Cuál será esta área máxima?

---

a)

$$\ell = 2x + 2y = 40;\ \ x + y = 20 \Rightarrow y = 20 - x.$$

$$S = x \cdot y \Rightarrow S(x) = x \cdot (20 - x) \Rightarrow \underline{S(x) = 20x - x^2}.$$



b)

La superficie será máxima cuando se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = 20 - 2x.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0;\ \ 10 - x = 0 \Rightarrow x = 10.$$

$$S''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 10.$$

$$y = 20 - 10 = 10.$$

$$\underline{La\ solución\ es\ un\ cuadrado\ de\ lado\ 10\ metros}.$$

$$\underline{La\ superfice\ máxima\ es\ de\ 100\ metros\ cuadrados}.$$

****

5º) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Encuentra la expresión general de A^n. Demuestra que la inversa de A^n es $\begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Encuentre la matriz X que satisface la ecuación matricial $A^{10} \cdot X - A^{20} = A$.

---

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La inversa de A se obtiene por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^n|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & n & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - nF_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -n \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{Queda\ demostrado\ que\ la\ inversa\ de\ A^n\ es\ \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ y\ A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$A^{10} \cdot X - A^{20} = A$; $A^{10} \cdot X = A + A^{20}$; $(A^{10})^{-1} \cdot A^{10} \cdot X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20})$;

$I \cdot X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20}) \Rightarrow \underline{X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20})}$.

Siendo, en general, $(A^n)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es $(A^{10})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A + A^{20} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 20 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A^{10})^{-1} \cdot (A + A^{20}) = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 21 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

****

6º) Considere la función real de variable real $f(x) = 4x^3 + ax^2 - 2$.

a) Determine el valor del parámetro real a para que la función tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ cuando $a = 12$. Indique también los puntos en que hay extremos relativos y clasifíquelos.

---

a)

Por tener un extremo relativo en $x = -1 \Rightarrow f'(-1) = 0$:

$f'(x) = 12x^2 + 2ax$.

$f'(-1) = 12 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) = 0;\ \ 12 - 2a = 0;\ \ 6 - a = 0 \Rightarrow \underline{a = 6}$.

b)

Para $a = 12$ la función es $f(x) = 4x^3 + 12x^2 - 2$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 12x^2 + 24x.\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 + 24x = 0;\ \ 12x(x+2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 0$.

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de su primera derivada dividen su dominio, que es R, en los intervalos $(-\infty, -2), (-2, 0)\ y\ (0, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente. Considerando, por ejemplo, $x = 1 \in (0, +\infty)$:

$f'(1) = 12 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 = 36 > 0 \Rightarrow Creciente$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-2, 0)}.$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento y teniendo en cuenta que la función es continua, la función tiene un máximo relativo para $x = -2$ y un mínimo relativo para $x = 0$.

$f(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 12 \cdot (-2)^2 - 2 = -32 + 48 - 2 = 48 - 34 = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(-2, 14)}.$

$f(0) = -2 \Rightarrow \underline{Mínimo\ relativo: Q(0, -2)}.$

****