PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

EXTRAORDINARIA – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) El coste de producción (en euros) de x unidades de un determinado producto viene dada por la función $C(x) = 0{,}02x^2 + 3x + 100$. Estas unidades se ponen a la venta y el precio unitario (en euros) depende del número de unidades producidas x. Concretamente, viene dado por la función $p(x) = 47 - 0{,}06x$. Supongamos que venden todas las unidades que se producen.

a) Determine la función que da los beneficios obtenidos en función del número de unidades producidas x.

b) Determine cuantas unidades debe producir para obtener el máximo beneficio y diga cuál es este beneficio.

---

a)

Los ingresos obtenidos son los siguientes:

$$I(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (47 - 0{,}06x) = 47x - 0{,}06x^2.$$

La función beneficios es:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 47x - 0{,}06x^2 - (0{,}02x^2 + 3x + 100) =$$

$$= 47x - 0{,}06x^2 - 0{,}02x^2 - 3x - 100 \Rightarrow \underline{B(x) = -0{,}08x^2 + 44x - 100}.$$

b)

Para que el beneficio sea máximo es necesario que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada:

$$B'(x) = -0{,}16x + 44. \qquad B''(x) = -0{,}16 < 0 \Rightarrow \text{Máximo.}$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -0{,}16x + 44 = 0;\ -0{,}04x + 11 = 0;\ \ x = \frac{11}{0{,}04} = 275.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ produciendo\ 275\ unidades\ del\ producto.}$$

$$B(275) = -0{,}08 \cdot 275^2 + 44 \cdot 275 - 100 = -6.050 + 12.100 - 100 =$$

$$= 12.000 - 6.050 = 5.950.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 5.950\ euros.}$$

****

2º) Martí explica a Marcel que el otro día, cuando cogió el autocar para ir de Barcelona a Tarragona, el autocar se estropeó justo en mitad del trayecto. Desde ese punto fue caminando hasta la población más cercana, por lo que hizo a pie una veintena parte del total del trayecto. Allí cogió un taxi hasta Tarragona, y dice que viajó 5 kilómetros más en autocar que en taxi.

a) Plantee y resuelva un sistema de ecuaciones para calcular cuántos kilómetros hizo Martín en autocar, a pie y en taxi.

b) Si el autocar iba a 100 km/h, Martí camino a 5 km/h y el taxi iba a 90 km/h, ¿cuánto tiempo tardó en realizar todo el trayecto?

---

a)

Para determinar la distancia d entre Barcelona y Tarragona se tiene en cuenta el único dato numérico: que en autocar viajó Martí 5 kilómetros más que en taxi.

$$\frac{d}{2} - \left(\frac{d}{2} - 5\right) = \frac{d}{20};\ \ 5 = \frac{d}{20};\ \ d = 5 \cdot 20 \Rightarrow d = 100\ km.$$

De la atenta lectura del enunciado se deduce el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 100 \\ x = \frac{100}{2} = 50 \\ z = \frac{100}{2} - 5 = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow 50 + y + 45 = 100;\ y + 95 = 5 \Rightarrow y = 5.$$

$$\underline{Martí\ viajó\ 50\ km\ en\ autobús, 5\ km\ andando\ y\ 45\ km\ en\ taxí.}$$

b)

$$v = \frac{e}{t} \Rightarrow t = \frac{e}{v} \Rightarrow t = \frac{x}{v_x} + \frac{y}{v_y} + \frac{z}{v_z} = \frac{50}{100} + \frac{5}{5} + \frac{45}{90} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2.$$

$$\underline{Martí\ tardó\ 2\ horas\ en\ realizar\ todo\ el\ trayecto.}$$

****

3º) El museo de Matemáticas de Cataluña (MMACA) tiene previsto montar una exposición. Se estima que el número de visitantes semanales que recibirá la exposición, expresada en decenas de personas, viene dado por la función $f(x) = \frac{240x}{x^2-2x+4}$, en que $x \geq 1$ representa el tiempo, expresado en semanas, el tiempo que la exposición está abierta al público.

a) ¿Cuántas personas irán a ver la exposición la primera semana? Calcule la tasa de variación media del número de visitantes entre la semana 1 y la semana 4.

b) ¿Qué semana se prevé que irá más gente a ver la exposición? ¿Cuántos visitantes se estima que irán esa semana?

---

a)

$$f(1) = \frac{240\cdot 1}{1^2-2\cdot 1+4} = \frac{240}{1-2+4} = \frac{240}{3} = 80.$$

$$\underline{Se\ estima\ que\ visitarán\ la\ exposición\ la\ primera\ semana\ 800\ personas.}$$

$$f(4) = \frac{240\cdot 4}{4^2-2\cdot 4+4} = \frac{240\cdot 4}{16-8+4} = \frac{240\cdot 4}{12} = \frac{240}{3} = 80.$$

$$TVM[a,b] = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = 1 \\ b = 4 \end{Bmatrix} \Rightarrow TVM[1,4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{80-80}{3} = 0.$$

$$\underline{TVM[1,4] = 0.}$$

b)

$$f'(x) = \frac{240\cdot(x^2-2x+4)-240x\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{240\cdot(x^2-2x+4-2x^2-2x)}{(x^2-2x+4)^2} = \frac{240\cdot(-x^2+4)}{(x^2-2x+4)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{240\cdot(-x^2+4)}{(x^2-2x+4)^2} = 0;\ -x^2+4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$$

La solución negativa carece de sentido lógico, por lo cual, $x = 2$.

$$\underline{La\ semana\ que\ más\ personas\ visitarán\ la\ exposición\ será\ la\ segunda.}$$

$$f(2) = \frac{240\cdot 2}{2^2-2\cdot 2+4} = \frac{240\cdot 2}{4-4+4} = \frac{240\cdot 2}{4} = \frac{240}{2} = 120.$$

$$\underline{La\ segunda\ semana\ visitarán\ la\ exposición\ 1.200\ personas.}$$

****

4º) La técnica de irradiación de los alimentos se utiliza para favorecer su conservación, pero unas dosis demasiado altas de irradiación pueden reducir su valor nutricional. Normalmente, para el procesamiento de alimentos se utilizan las radiaciones provenientes del cobalto y del cesio. Queremos utilizar esta técnica para tratar alimentos que ya han comenzado a deteriorarse. Considere x e y las cantidades emitidas de rayos de cobalto y de cesio, respectivamente, medidas en grays. Sabemos que la cantidad de radiación absorbida en la parte dañada del alimento es de $6x + 4y$ grays, alrededor de la parte dañada es de $3x + y$ grays y en las partes que están en buenas condiciones es de $4x + 5y$ grays.

a) Calcule las cantidades de rayos de cobalto y de rayos de cesio que habrá que utilizar para la cantidad de radiación absorbida por las partes en buenas condiciones sea mínima, teniendo en cuenta que en la parte dañada esta cantidad debe ser como mínimo de 60 grays y alrededor no puede exceder de 27 grays. Para ello, determine cuál es la función objetivo a minimizar y las restricciones, y dibuje la región factible.

b) Si aplicamos un tratamiento consistente en 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio, compruebe que se cumplen las dos restricciones (la que hace referencia a la parte dañada y la que hace referencia alrededor de la parte dañada). ¿Por qué es un tratamiento peor que la solución que ha encontrado en el apartado a)?

---

a)

Del enunciado se deducen las condiciones del ejercicio, que son las inecuaciones siguientes: $\left.\begin{array}{r} 6x+4y \geq 60 \\ 3x+y \leq 27 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x+2y \geq 30 \\ 3x+y \leq 27 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x + 2y \geq 30 \Rightarrow y \geq \frac{30-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	0	10
y	15	0

② $\Rightarrow 3x + y \leq 27 \Rightarrow y \leq 27 - 3x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	9	0
y	0	27

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3x + 2y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 30;\ \ y = 15 \Rightarrow A(0,15).$$

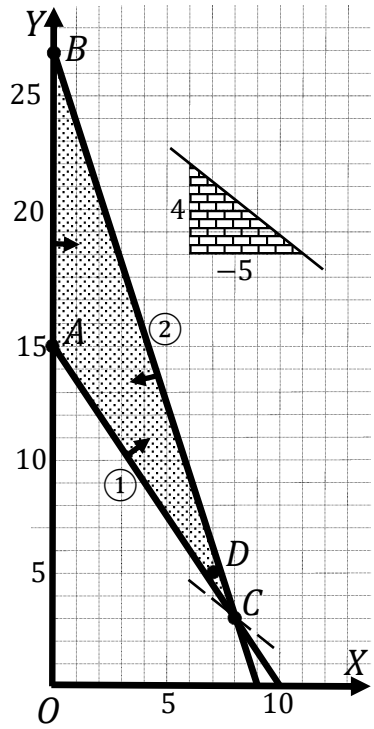
$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3x + y = 27 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 27 \Rightarrow B(0,27).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 30 \\ 3x + y = 27 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 30 \\ -3x - y = -27 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3;\ \ 3x + 6 = 30;\ \ 3x = 24;$$

$x = 8 \Rightarrow C(8,3).$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

La función de objetivos: $f(x,y) = 4x + 5y$.



Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,15) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 15 = 0 + 75 = 75.$

$B \Rightarrow f(0,27) = 4 \cdot 0 + 5 \cdot 27 = 0 + 135 = 135.$

$C \Rightarrow f(8,3) = 4 \cdot 8 + 5 \cdot 3 = 32 + 15 = 47.$

El valor mínimo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 4x + 5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x \Rightarrow m = -\frac{4}{5}.$

$\underline{El\ radiación\ es\ mínima\ usando\ 8\ grays\ de\ cobalto\ y\ 3\ grays\ de\ cesio.}$

$\underline{La\ radiación\ mínima\ es\ de\ 47\ grays.}$

$b)$

$3x + 5y \geq 30 \Rightarrow Para \begin{Bmatrix} x = 7 \\ y = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot 7 + 2 \cdot 5 = 21 + 10 = 31 \geq 30.$

$3x + y \leq 27 \Rightarrow Para \begin{Bmatrix} x = 7 \\ y = 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow 3 \cdot 7 + 5 = 26 \leq 26.$

Queda comprobado que se cumplen las dos restricciones aplicando un tratamiento con 7 grays de rayos de cobalto y 5 grays de rayos de cesio.

En el gráfico se justifica la posibilidad anterior teniendo en cuenta que el punto $D(7,5)$ pertenece a la zona factible.

Considerando la función de objetivos: $f(x,y) = 4x + 5y$, el coste del tratamiento anterior es el siguiente:

$D \Rightarrow f(7,5) = 4 \cdot 7 + 5 \cdot 5 = 28 + 25 = 53 > 45.$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ este\ tratamiento\ es\ peor\ que\ la\ solución\ encontrada.}$

****

5º) Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Calcule para qué valores de a las dos matrices conmutan, es decir, los valores de a para los cuales se cumple que $A \cdot B = B \cdot A$. Compruebe que para este valor de a se satisface que $A \cdot B = 2I$, donde I es la matriz identidad de orden dos.

b) Para el valor que ha encontrado en el apartado anterior, calcula las matrices inversas de las matrices $A \cdot B$. Puede aplicar la relación $A \cdot B = 2I$.

---

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-a \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2+2 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1.$$

$$\underline{Las\ matrices\ A\ y\ B\ conmutan\ para\ a = 1}.$$

b)

Para $a = 1 \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B)^{-1} = 2I \cdot (A \cdot B)^{-1};\ \ I = 2I \cdot (A \cdot B)^{-1} \Rightarrow \underline{(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot I}.$$

****

6º) Un inversor se da cuenta que en el momento actual sus acciones tienen unas pérdidas de 2.000 euros. Su asesor financiero tiene una previsión del valor de las acciones para los próximos 30 días. Le dice que el valor de las acciones ya ha comenzado a aumentar y que en pocos días dejará de tener pérdidas. Según las previsiones, en los próximos 10 días el valor de las acciones crecerá; del día 10 al día 20 los beneficios disminuirán, y a partir de éste día los beneficios volverán a crecer. El asesor también dice al inversor que la previsión de los beneficios para los próximos 30 días tiene como modelo la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, en la que $x \in [0, 30]$.

a) Calcule los valores de los parámetros a, b, c.

b) Si el inversor quiere vender sus acciones durante estos 30 días, ¿cuál es el día en que obtendrá mayor beneficio en la venta? ¿Qué beneficio obtendrá?

---

a)

$f(0) = -2.000 \Rightarrow \underline{c = -2.000}$.

Del enunciado se deduce que la función beneficios tiene un máximo relativo para $x = 10$ y un mínimo relativo para $x = 20$, por lo cual: $f'(10) = f'(20) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$f'(10) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 10^2 + 2a \cdot 10 + b = 0;\ \ 20a + b = -300.$ (1)

$f'(20) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 20^2 + 2a \cdot 20 + b = 0;\ \ 40a + b = -1.200.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 20a + b = -300 \\ 40a + b = -1.200 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -20a - b = 300 \\ 40a + b = -1.200 \end{array}\right\} \Rightarrow 20a = -900 \Rightarrow \underline{a = -45}.$$

$-20 \cdot 45 + b = -300;\ \ b = 900 - 300 \Rightarrow \underline{b = 600}$.

La función beneficios resulta $f(x) = x^3 - 45x^2 + 600x - 2.000$.

b)

$f(10) = 10^3 - 45 \cdot 10^2 + 600 \cdot 10 - 2.000 =$

$= 1.000 - 4.500 + 6.000 - 2.000 = 7.000 - 6.500 = 500.$

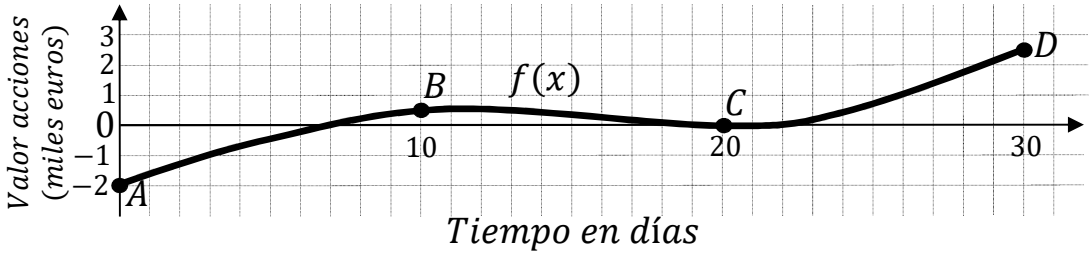
$f(20) = 20^3 - 45 \cdot 20^2 + 600 \cdot 20 - 2.000 =$

$= 8.000 - 18.000 + 12.000 - 2.000 = 20.000 - 20.000 = 0.$

$f(30) = 30^3 - 45 \cdot 30^2 + 600 \cdot 30 - 2.000 =$

$= 27.000 - 40.500 + 18.000 - 2.000 = 45.000 - 42.500 = 2.500.$

La representación gráfica, aproximada, de la función es la expresada en la figura adjunta.



$\underline{Obtiene\ el\ máximo\ beneficio\ vendiendo\ las\ acciones\ el\ día\ 30.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 2.500\ euros.}$

****