# PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

# UNIVERSIDAD DE CATALUÑA

# JUNIO – 2022

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS                    Tiempo máximo:   1 horas y 30 minutos

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

1º) En el Instituto de Martí han elaborado tres tipos diferentes de ramos de rosas para vender el día de San Jorge. La opción clásica consiste en una rosa y una espiga. La opción ramo pequeño está formada por tres rosas y dos espigas. Y, finalmente, la opción de ramo grande consiste en media docena de rosas y tres espigas. Todos los ramos (sean de la opción que sean) llevan un bonito envoltorio. Sabemos que han utilizado 200 rosas, 135 espigas y 85 envoltorios.

$a$) ¿Cuántos ramos se han elaborado de cada tipo?

$b$) Si el precio de venta de un ramo de la opción clásica es de 3 euros, de un ramo pequeño es de 5 euros y el de un ramo grande es de 10 euros, ¿cuánto dinero se ingresará si se venden todos?

----------

$a$)

Sean $x, y, z$ los ramos de rosas de los tipos clásico, pequeño y grande que se elaboran en el Instituto, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce es: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=85 \\ x+3y+6z=200 \\ x+2y+3z=135 \end{array}\right\}$.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 85 & 1 & 1 \\ 200 & 3 & 6 \\ 135 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{765+400+810-405-1.020-600}{9+2+6-3-12-3}=\frac{1.975-2.025}{-1}=\frac{-50}{-1}=50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 85 & 1 \\ 1 & 200 & 6 \\ 1 & 135 & 3 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{600+135+510-200-810-255}{-1}=\frac{1.245-1.265}{-1}=\frac{-20}{-1}=20.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 85\\ 1 & 3 & 200\\ 1 & 2 & 135\end{vmatrix}}{-1}=\frac{405+170+200-255-400-135}{-1}=\frac{775-790}{-1}=\frac{-15}{-1}=15.$$

$$\underline{Se\ han\ elaborado\ 50\ ramos\ clásicos, 20\ pequeños\ y\ 15\ grandes.}$$

$b)$

$$Ingresos=50\cdot 3+20\cdot 5+15\cdot 10=150+100+150=400.$$

$$\underline{Si\ se\ venden\ todos\ los\ ramos\ se\ obtiene\ un\ ingreso\ de\ 400\ euros.}$$

**********

2º) Experimentalmente se ha comprobado que la producción de un tipo de fruta determinado que se cultiva en invernaderos depende de la temperatura, según la función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$, donde $x$ representa la temperatura del invernadero en grados Celsius y $f(x)$ es la producción anual en cientos de kilogramos por hectárea. El precio de venta de la fruta se mantiene estable en 1,2 euros por cada kilogramo.

$a$) Determine el intervalo de temperaturas entre las que hay que mantener el invernadero para que haya producción de fruta. Calcule los ingresos anuales por hectárea si se mantiene el invernadero a 20° C de temperatura.

$b$) ¿A qué temperatura se obtiene la producción máxima de fruta? ¿Qué ingresos por hectárea se obtienen en este caso?

----------

$a$)

La función $f(x) = -x^2 + 46x - 360$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de $x^2$, por lo cual, presenta un máximo para el valor que anula su primera derivada:

$$f'(x) = -2x + 46 = 0;\ -x + 23 = 0 \Rightarrow x = 23.$$

$$f(23) = -23^2 + 46 \cdot 23 - 360 = -529 + 1.058 - 360 = 169 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(23, 169).$$

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 46x - 360 = 0;\ \ x^2 - 46x + 360 = 0;$$

$$x = \frac{46 \pm \sqrt{2.116 - 1.440}}{2} = \frac{46 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{46 \pm 26}{2} = 23 \pm 13 \Rightarrow x_1 = 10, x_2 = 36.$$

$$\underline{El\ invernadero\ es\ productivo\ entre\ 10°\ C\ y\ 36°\ C.}$$

$$f(20) = -20^2 + 46 \cdot 20 - 360 = -400 + 920 - 360 = 160.$$

$$I(20) = 160 \cdot 100 \cdot 1{,}2 = 160 \cdot 120 = 19.200.$$

$$\underline{Los\ ingresos\ por\ hectárea\ del\ invernadero\ a\ 20°\ C\ son\ de\ 19.200\ euros.}$$

$b$)

Del apartado anterior se deduce que:

$$\underline{La\ producción\ del\ invernadero\ es\ máxima\ a\ una\ temperatura\ de\ 23°\ C.}$$

$$I(23) = 169 \cdot 100 \cdot 1{,}2 = 169 \cdot 120 = 20.280.$$

*Los ingresos máximos por hectárea del invernadero son de* 20.280 *euros*.

**********

3º) Una empresa se propone hacer dos tipos de cestas de Navidad, A y B, para los trabajadores y trabajadoras. Cada cesta tipo A contendrá un jamón, una botella de cava y cinco barras de turrón. Por otro lado, cada cesta de tipo B contendrá dos jamones, tres botellas de cava y dos barras de turrón. El jefe de almacén afirma que disponen de 40 jamones, 120 barras de turrón y muchas botellas de cava, y que, por tanto, cava seguro que no faltará. Se quieren hacer tantas cestas como sea posible.

$a$) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. ¿Cuántas cestas de cada tipo tendrá que hacer la empresa?

$b$) Una vez hecho el cálculo, la jefa de la empresa se lo repiensa y dice que es mejor hacer la misma cantidad de cestas de cada tipo. Con esta nueva condición, ¿cuántas cestas de cada tipo se tendrán que hacer?

----------

$a$)

Como las botellas de cava son suficientes, no se considera este dato para la resolución del aparado.

Sean $x$ $e$ $y$ el número de cestas de los tipos A y B que se elaboran en la empresa, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+2y \le 40 \\ 5x+2y \le 120 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}$.

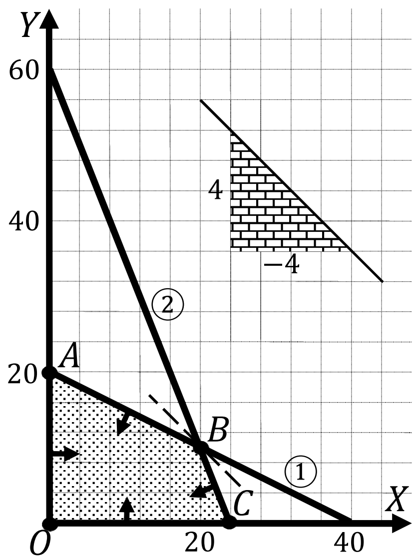
$① \Rightarrow x+2y \le 40 \Rightarrow y \le \frac{40-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

| **x** | 0 | 40 |
|---|---|---|
| **y** | 20 | 0 |

$② \Rightarrow 5x+2y \le 120 \Rightarrow y \le \frac{120-5x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

| **x** | 0 | 24 |
|---|---|---|
| **y** | 60 | 0 |

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.




Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=40 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=40 \\ 5x+2y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-40 \\ 5x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x=80;\ x=20;\ 2y=20;\ \ y=10 \Rightarrow B(20,10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 5x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x=120;\ \ x=24 \Rightarrow C(24,0).$

La función de objetivos es $f(x,y)=x+y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,20) = 0 + 20 = 20.$ $\qquad B \Rightarrow f(20,10) = 20 + 10 = 30.$

$C \Rightarrow f(24,0) = 24 + 0 = 24.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20,10)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -x = -\frac{4}{4}x \Rightarrow m = -\frac{4}{4}.$$

$\underline{La\ solución\ idónea\ es\ que\ la\ empresa\ elabore\ 20\ cestas\ A\ y\ 10\ B.}$

$b)$

Si las cestas son las mismas, $(y = x)$, el problema es el mismo sustituyendo la "$y$" por "$x$".

Las restricciones quedan de la forma: $\left.\begin{array}{r} x + 2x \leq 40 \\ 5x + 2x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x \leq 40 \\ 7x \leq 120 \\ x \geq 0 \end{array}\right\}.$

Siendo $x \leq \frac{40}{3} = 13{,}33\ y\ x \leq \frac{120}{7} = 17{,}14$ y $x \geq 0$, la solución es $x \leq 13{,}33$ y como el número de cestas tiene que ser natural:

$\underline{Con\ estas\ condiciones\ la\ empresa\ debe\ elaborar\ 13\ cestas\ de\ cada\ tipo.}$

**********

4º) Un grupo de biólogos está estudiando un cultivo de bacterias. La población de estas bacterias (en cientos) es dada por la función $P(t) = a + \frac{12t}{t^2+b}$, en la que $a$ y $b$ son constantes positivas reales y $t \geq 0$ es el tiempo transcurrido en minutos. Sabemos que al instante inicial del estudio la población de bacterias era de 6 cientos y que el valor máximo de población se ha alcanzado a los 2 minutos de iniciar el estudio.

$a$) Encuentre los valores de $a$ y $b$.

$b$) Calcule la población máxima de bacterias y estudie el comportamiento a largo plazo, es decir, hacia qué valor se estabiliza el número de bacterias.

----------

$a$)

$$P(0) = 6 \Rightarrow a + \frac{12 \cdot 0}{0^2+b} = 6 \Rightarrow \underline{a = 6}. \qquad P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2+b}.$$

$$P'(t) = 0 + \frac{12 \cdot (t^2+b) - 12t \cdot 2t}{(t^2+b)^2} = \frac{12t^2+12b-24t^2}{(t^2+b)^2} = \frac{12b-12t^2}{(t^2+b)^2}.$$

$$P'(2) = 0 \Rightarrow \frac{12b-12 \cdot 2^2}{(2^2+b)^2} = 0; \;\; 12b - 48 = 0; \;\; b - 4 = 0 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

Se justifica que se trata de un máximo para $b = 4$ y $t = 2$.

$$P'(t) = \frac{12 \cdot 4 - 12t^2}{(t^2+4)^2} = 12 \cdot \frac{4-t^2}{(t^2+4)^2}.$$

$$P''(t) = 12 \cdot \frac{-2t \cdot (t^2+4)^2 - (4-t^2) \cdot [2 \cdot (t^2+4) \cdot 2t]}{(t^2+4)^4} = -24 \cdot \frac{t \cdot (t^2+4) + 2t \cdot (4-t^2)}{(t^2+4)^3} =$$

$$= -24 \cdot \frac{t^3+4t+8t-2t^3}{(t^2+4)^3} \Rightarrow P''(t) = -24 \cdot \frac{12t-t^3}{(t^2+4)^3}.$$

$$P''(2) = -24 \cdot \frac{12 \cdot 2 - 2^3}{(2^2+4)^3} = -24 \cdot \frac{24-8}{8^3} = -3 \cdot \frac{16}{64} < 0 \Rightarrow Máximo, c.q.j.$$

$b$)

La función resulta: $P(t) = 6 + \frac{12t}{t^2+4}$.

$$P(2) = 6 + \frac{12 \cdot 2}{2^2+4} = 6 + \frac{24}{8} = 6 + 3 = 9. \qquad \lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \left(6 + \frac{12t}{t^2+4}\right) = 6$$

$\underline{El\ número\ máximo\ de\ bacterias\ es\ de\ 900}.$

$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ el\ número\ de\ bacterias\ se\ estabiliza\ en\ 600.}$

***********

5º) Considere las matrices $P=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ a & 2 & 3\end{pmatrix}$ $y$ $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, donde $a$ es un parámetro real.

$a)$ Encuentra para qué valores de $a$ es invertible la matriz obtenida del resultado del producto $P\cdot A$.

$b)$ Si $a=2$, encuentra la matriz $X$ que satisface la ecuación matricial $P\cdot A+X=I$, en la que $I$ denota la matriz identidad de orden 2.

----------

$a)$

$$P\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ a & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -a+3 & -2a-1\end{pmatrix}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|P\cdot A|=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -a+3 & -2a-1\end{vmatrix}=2a+1+3a-9=0;\;\; 5a=8\Rightarrow a=\frac{8}{5}.$$

$$\underline{La\ matriz\ P\cdot A\ es\ invertible\ \forall a\in R-\left\{\frac{8}{5}\right\}}.$$

$b)$

Para $a=2$ es $P\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}$.

$$P\cdot A+X=I;\;\; X=I-P\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 1 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{X=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -1 & 6\end{pmatrix}}.$$

**********

6º) En los modelos matemáticos que se utilizan para descubrir la evolución de una enfermedad, se llama Ro el número medio de nuevas infecciones que cada persona infectada provoca en la población. Cuando ese número es inferior a 1, cada individuo infectado transmite la enfermedad, por término medio, a menos de una persona y la enfermedad tiende a desaparecer. En cambio, si Ro es mayor que 1, la enfermedad se extiende y se produce una epidemia. Cuando se descubre una vacuna efectiva contra la enfermedad, se puede controlar la epidemia vacunando sólo una proporción $p$ de la población. Es lo que se conoce como inmunidad de grupo. Efectivamente, una vez vacunada una proporción $p \in (0, 1)$ de la población, la nueva Ro, que se llama efectiva y se denota con Re, es el producto de la Ro original por la proporción de individuos que no están vacunados, $1 - p$. Y se logra controlar la epidemia se la Re es inferior a uno.

$a$) En el caso del sarampión, se estima que $Ro = 15$. Si analizamos una población con un porcentaje de individuos vacunados del 95 %, según el modelo descrito, ¿existe riesgo de que se produzca una epidemia de sarampión en esta población?

$b$) En el caso concreto de la llamada gripe española de 1.918, se estima que $Ro = 4$. Calcula qué porcentaje de población habría sido necesario vacunar, como mínimo, para detener la epidemia de esta enfermedad.

$c$) Exprese, en general, el umbral de población mínimo a vacunarse en función del valor de Ro de una enfermedad. Haga un esbozo de esta función para los valores de Ro entre 1 y 20.

----------

$a$)

$Datos: Ro = 15;\ \ p = 95\ \% = 0{,}95.$ Existe riesgo cuando $Re > 1$.

$$Re = Ro \cdot (1 - p) = 15 \cdot (1 - 0{,}95) = 15 \cdot 0{,}05 = 0{,}75 < 1.$$

$\underline{No\ existe\ riesgo\ de\ epidemia\ de\ sarampión\ en\ esa\ población.}$

$b$)

$$Re = Ro \cdot (1 - p) < 1;\ \ 4 \cdot (1 - p) < 1;\ \ 4 - 4p = 1;\ \ 4p = 3;\ \ p = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

$\underline{Habría\ sido\ necesario\ vacunar\ al\ menos\ al\ 75\ \%\ de\ la\ población.}$

$c$)

En general tiene que cumplirse que:

$$Ro \cdot (1 - p) < 1;\ \ 1 - p < \frac{1}{Ro};\ -p < \frac{1}{Ro} - 1 \Rightarrow \underline{p(Ro) > 1 - \frac{1}{Ro}}.$$

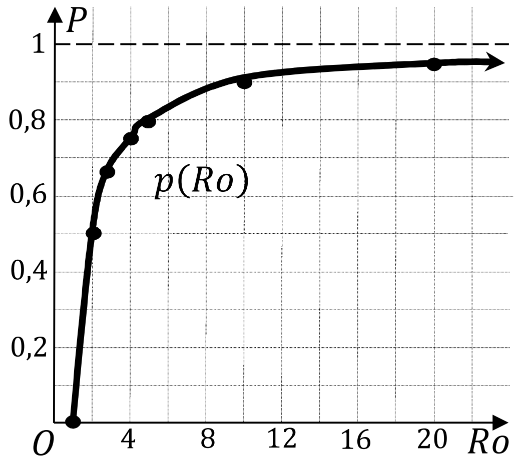
Para representar la función $p(Ro)$ entre los valores 1 y 20 tenemos en cuenta que tiene una asíntota vertical para $Ro = 1$ y una asíntota horizontal para $Ro = 0$.

$$p(Ro) > 1 - \frac{1}{Ro} = \frac{Ro-1}{Ro} \Rightarrow \lim_{Ro\to\infty} p(Ro) = \lim_{Ro\to\infty} \frac{Ro-1}{Ro} = 1.$$

Una tabla de valores es la siguiente:

| $Ro$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0 | 0,5 | 0,67 | 0,75 | 0,8 | 0,9 | 0,95 |

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.




**********