PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2010

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.
Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Encuentre las asíntotas de la función $f(x)=\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales y oblicuas.

Horizontales: son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}=\infty \;\Rightarrow\; \underline{No\ \ tiene.}$$

Verticales: son los valores de x que anulan el denominador.

$$x^2-4x-5=0\ ;;\ x=\frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{36}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=2\pm 3 \;\Rightarrow\; \underline{x_1=-1}\ ;;\ \underline{x_2=5}.$$

Son asíntotas verticales las rectas x = -1 y x = 5.

Oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^3-5x-2}{x^2-4x-5}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-5x-2}{x^3-4x^2-5x}=\underline{3=m}$$

$$n = \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^3 - 5x - 2}{x^2 - 4x - 5} - 3x \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^3 - 5x - 2 - 3x^3 + 12x^2 + 15x}{x^2 - 4x - 5} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{12x^2 + 10x - 2}{x^2 - 4x - 5} = \underline{\underline{12 = n}}$$

La asíntota oblicua es y = 3x + 12.

****

2ª) Dado el plano $\pi \equiv 5x + y + 3z = 4$ y la recta $r \equiv \begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \end{cases}$, estudie su posición relativa en función del parámetro α.

La recta r y el plano π determinan el sistema $\begin{cases} ax - y = 2 \\ 2y + z = -3 \\ 5x + y + 3z = 4 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M' = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango M = Rango M' = 3 → Secantes. (un punto en común)

Rango M = 2 ;; Rango M' = 3 → Paralelos. (ningún punto en común)

Rango M = Rango M' = 2 → Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$Rango\ \ M \;\Rightarrow\; |M| = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6a - 5 - a = 5a - 5 = 5(a-1) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{a = 1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a \neq 1 \Rightarrow Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 3 \Rightarrow La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ secantes}}$$

$$Para\ \ a = 1\ \ es\ \ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ M' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 - 20 + 3 = 26 - 20 = 6 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ \ M' = 3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ \ a = 1 \Rightarrow Rango\ \ M = 2\ \ ;;\ \ Rango\ \ M' = 3 \Rightarrow La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ \pi\ \ son\ \ paralelos}}$$

****

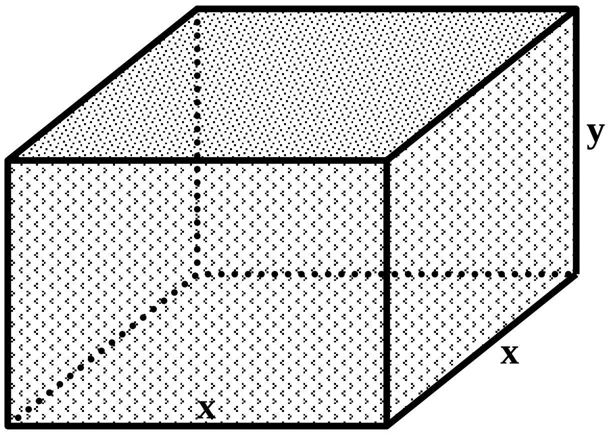
3ª) Considere todos los prismas rectos de base cuadrada con un volumen V fijado. Sea x el lado de la base del prisma e y su altura.

a) Encuentre la expresión del volumen y del área total del prisma en función de las variables x e y.

b) Compruebe que el que tiene área total mínima es en realidad un cubo.

----

a)



La relación que existe entre las dimensiones del lado de la base y la altura pueden relacionarse a partir del volumen:

$$\underline{V = x^2 \cdot y}$$

$$\underline{S_T = 2x^2 + 4xy}$$

b)

De la fórmula del volumen el valor de y es el siguiente: $y = \frac{V}{x^2}$. Sustituyendo este valor en la fórmula de la superficie total:

$$S_T = 2x^2 + 4x \cdot \frac{V}{x^2} = \underline{2x^2 + \frac{4V}{x} = S_T} \ .$$

Para que la superficie total sea mínima tiene que ser cero su derivada:

$$S_T' = 4x - \frac{4V}{x^2} = 0 \ \Rightarrow \ \frac{4x^3 - 4V}{x^2} = 0 \ ;; \ 4x^3 - 4V = 0 \ ;; \ x^3 = V \ ;; \ \underline{x = \sqrt[3]{V}} \ .$$

$$y = \frac{V}{x^2} = \frac{V}{\left(\sqrt[3]{V}\right)^2} = \frac{V}{\sqrt[3]{V^2}} = \frac{V \cdot \sqrt[3]{V}}{V} = \underline{\sqrt[3]{V} = y = x} \ .$$

Para justificar que se trata de un mínimo tenemos que demostrar que la segunda derivada es positiva para el valor de $x = \sqrt[3]{V}$:

$$S_T'' = 4 + \frac{4V \cdot 2x}{x^4} = \underline{4 + \frac{8V}{x^3}} \ \Rightarrow \ S''_T\left(\sqrt[3]{V}\right) = 4 + \frac{8V}{\left(\sqrt[3]{V}\right)^3} = 4 + 8 = 12 > 0 \ \Rightarrow \ \underline{\textit{Mínimo, c.q.j.}}$$

<u>Por ser x = y se trata de un cubo, como teníamos que comprobar.</u>

****

4ª) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Compruebe que cumple la igualdad $A^2-5A=I$, siendo I la matriz identidad de orden dos.

b) Utilice esta igualdad para calcular la matriz inversa de A.

c) Resuelva la ecuación matricial $A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, utilizando la matriz inversa de A.

----

a)

$$A^2-5A=I \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^2 - 5\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 35 & 15 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 4+7 & 2+3 \\ 14+21 & 7+9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 35 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 35 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 35 & 15 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I}\ .$$

$$\underline{\underline{A^2-5A=I,\ como\ se\ acaba\ de\ comprobar.}}$$

b)

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I = A^2-5A = A\cdot(A-5I) \;\Rightarrow\; \underline{A^{-1}=A-5I}\ .$$

$$A^{-1}=A-5I=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} = A^{-1}}}\ .$$

c)

$$A\cdot X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\ ;;\ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\ ;;\ I\cdot X = A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\ ;;$$

$$\underline{X=A^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}}.$$

$$X=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0-2 & -3+0 \\ 0+4 & 7-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}}}$$

****

5ª) Dada la función $f(x)=\frac{8x^2}{2x+1}$, encuentre el área del recinto limitado por la gráfica de esta función, el eje OX y las rectas x = 0 y x = 2.

Los valores de la función entre x = 0 y x = 2 son positivos por lo cual el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^2 \frac{8x^2}{2x+1}\cdot dx \Rightarrow \text{ (Haciendo la división) } \Rightarrow$$

$$\begin{array}{lll|l} 8x^2 & & & 2x+1 \\ \cline{4-4} -8x^2 & -4x & & 4x-2 \\ \cline{1-3} 0 & -4x & & \\ & +4x & +2 & \\ \cline{2-3} & 0 & +2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow S=\int_0^2\left(4x-2+\frac{2}{2x+1}\right)\cdot dx=\int_0^2\left(4x-2+\frac{2}{2x+1}\right)\cdot dx=\left[\frac{4x^2}{2}-2x\right]_0^2+2\int_0^2\frac{1}{2x+1}\cdot dx=$$

$$=\left[2x^2-2x\right]_0^2+2I=\left(2\cdot 2^2-2\cdot 2\right)-0+2I=8-4+2I=\underline{4+2I=S}. \quad (*)$$

$$I=\int_0^2\frac{1}{2x+1}dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l|l} 2x+1=t & x=2\rightarrow t=5 \\ dx=\frac{1}{2}dt & x=0\rightarrow t=1\end{array}\right\}\Rightarrow I=\int_1^5\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2}dt=\left[\frac{1}{2}Lt\right]_1^5=\frac{1}{2}L5-\frac{1}{2}L1=\underline{\frac{1}{2}L5=I}.$$

Sustituyendo en (*) el valor de I: $S=4+2\cdot\frac{1}{2}L5=4+L5$.

$$\underline{\underline{S=(4+L5)\,u^2}}$$

****

6ª) Considere la recta $r \equiv \frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{-1} = z-1$.

a) Encuentre los dos puntos, A y B, de la recta r que están situados a una distancia $d = \sqrt{6}$ del punto P(-1, 1, 2).

b) Encuentre el área del triángulo de vértices A, B y P.

----

a)

La recta r puede expresarse por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = -4-2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$.

La expresión de un punto genérico de r es $Q(-4-2\lambda,\ 1-\lambda,\ 1+\lambda)$.

$$\overline{AQ} = \sqrt{(-4-2\lambda+1)^2 + (1-\lambda-1)^2 + (1+\lambda-2)} = \sqrt{6} \ ;; \ (-3-2\lambda)^2 + \lambda^2 + (\lambda-1)^2 = 6 \ ;;$$

$$9+12\lambda+4\lambda^2+\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1 = 6 \ ;; \ 6\lambda^2+10\lambda+4 = 0 \ ;; \ 3\lambda^2+5\lambda+2 = 0 \ ;;$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{-5 \pm 1}{6} \Rightarrow \underline{\lambda_1 = -1} \ ;; \ \underline{\lambda_2 = -\frac{2}{3}}.$$

$$Para \ \ \lambda = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = -4+2 = -2 \\ y = 1+1 = 2 \\ z = 1-1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A(-2,\ 2,\ 0)}}.$$

$$Para \ \ \lambda = -\frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -4+\frac{4}{3} = -\frac{8}{3} \\ y = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3} \\ z = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{B\left(-\frac{8}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right)}}$$

b)

Los vectores que determinan el triángulo ABP son:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-1,\ 1,\ 2) - (-2,\ 2,\ 0) = \underline{(1,\ -1,\ 2)}.$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (-1,\ 1,\ 2) - \left(-\frac{8}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{1}{3}\right) = \underline{\left(\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{5}{3}\right)}.$$

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{AP}$ y $\overrightarrow{BP}$.

Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{AP} \wedge \overrightarrow{BP}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 5 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \left| -5i + 10j - 2k + 5k + 4i - 5j \right| = \frac{1}{6} \cdot \left| -i + 5j + 3k \right| = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 3^2} = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{1 + 25 + 9} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{6} \cdot \sqrt{35} \cong 0'986\ u^2 = S}}$$

****