# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# COMUNIDAD DE CATALUÑA

# SEPTIEMBRE – 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder sólo a tres de las cuatro cuestiones y resolver sólo uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué.

## CUESTIONES

1ª) Determina para qué valor del parámetro $\alpha$ el plano $\pi \equiv \alpha x + 2y + z = \alpha$ es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + z = \alpha + 1 \end{cases}$.

---

Para que la recta r sea paralela al plano $\pi \equiv \alpha x + 2y + z = \alpha$ es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano, $\vec{n} = (\alpha,\ 2,\ 1)$ sean perpendiculares.

Para obtener el vector director de la recta la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + z = \alpha + 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow x = \frac{1}{\alpha}(\alpha + 1 - \lambda) = \underline{\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\lambda = x} \ ;;\ y = \frac{1}{\alpha}(x + z - 1) =$$

$$= \left[\frac{1}{\alpha}(\alpha + 1 - \lambda) + \lambda - 1\right] = 1 + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\lambda + \lambda - 1 = \underline{\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\lambda = y}$$

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{\alpha}\lambda \\ y = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha - 1}{\alpha}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}} \Rightarrow \underline{\vec{v} = \left(-\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha - 1}{\alpha},\ 1\right)}$$

Sabiendo que dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es ce-

ro, sería:

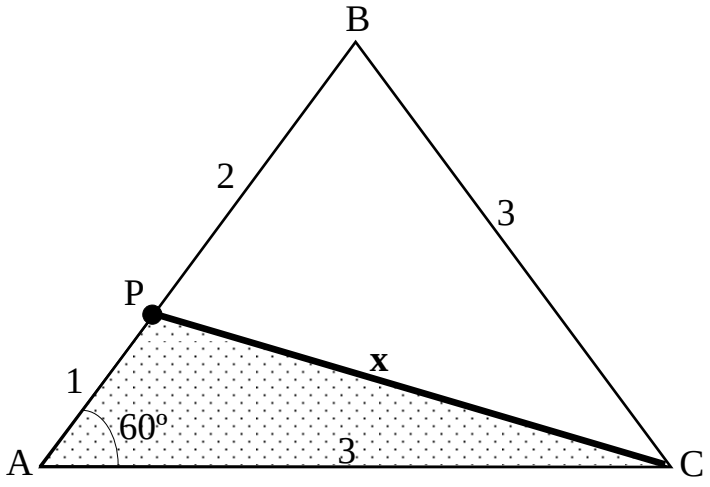
$$\vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\alpha,\ 2,\ 1) \cdot \left( -\frac{1}{\alpha},\ \frac{\alpha - 1}{\alpha},\ 1 \right) = 0 \ ;;\ -1 + \frac{2\alpha - 2}{\alpha} + 1 = 0 \ ;;\ \frac{2\alpha - 2}{\alpha} = 0 \ ;;$$

$$2\alpha - 2 = 0 \ ;;\ \alpha - 1 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\alpha = 1}}$$

**********

2ª) Sean A, B y C los tres vértices de un triángulo equilátero de lado 3 cm y P el punto del lado AB que está a 1 cm del vértice A. ¿Cuál es la longitud del segmento CP?

---




Aplicando el teorema del coseno al triángulo APC, resulta:

$$x^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot \cos 60^o = 1 + 9 - 6 \cdot \frac{1}{2} = 10 - 3 = 7 \;\; ;; \;\; \underline{x = \sqrt{7} \equiv 2'65}$$

$$\underline{\underline{\overline{CP} = 2'65 \;\; unidades}}$$

**********

3ª ) Considera la función definida por $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & si \;\; x \le 0 \\ 2x+1 & si \;\; x > 0 \end{cases}$, donde $a \in R$.

a ) Calcula $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ y comprueba que $f(x)$ es continua en x = 0.

b ) ¿Para qué valor del parámetro a la función $f(x)$ es derivable en x = 0?

---

a )

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} e^{ax} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Para que una función sea continua en un punto es necesario que sus límites por la izquierda y por la derecha sean iguales e igual al valor numérico de la función en ese punto.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} (2x+1) = \underline{1} = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

<u>En efecto, la función es continua para x = 0, c.q.c.</u>

b )

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que la función sea continua en ese punto (comprobada en el apartado anterior) y que las derivadas por la izquierda y por la derecha sean iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} a \cdot e^{ax} & si \;\; x \le 0 \\ 2 & si \;\; x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = a \cdot e^0 = a \cdot 1 = \underline{a} \\ f'(0^+) = \underline{2} \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \underline{\underline{a = 2}}$$

<u>La función es derivable en x = 0 para x = 2.</u>

**********

4ª) Se sabe que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto A(1, -4) y que su función derivada es $f'(x) = 2x - 2$.

a ) Determina la expresión de $f(x)$.

b ) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas OX.

---

a )

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (2x-2) \cdot dx = \frac{2x^2}{2} - 2x + K = \underline{x^2 - 2x + K = f(x)}$$

Como la función pasa por A(1, -4) tiene que ser:

$$f(1) = -4 \;\Rightarrow\; f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + K = -4 \;;;\; 1 - 2 + K = -4 \;\Rightarrow\; \underline{K = -3}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^2 - 2x - 3}}$$

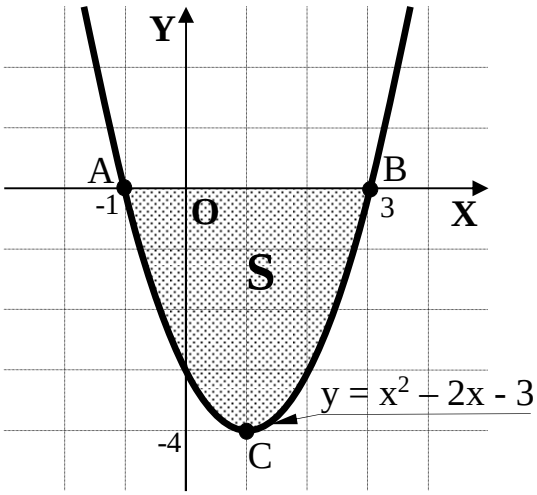
b )

Con objeto de hacer un esquema de la situación, determinamos el punto mínimo y los cortes con el eje de abscisas de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$:

$$y = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 2x - 3 = 0 \;;;\; x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 = -1 \;\rightarrow\; \underline{A(-1,\ 0)} \\ x_2 = 3 \;\rightarrow\; \underline{B(3,\ 0)} \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \;;;\; 2(x-1) = 0 \;;;\; \underline{x = 1} \;\Rightarrow\; f(1) = 1 - 2 - 3 = -4 \;\Rightarrow\; Mín.: \underline{C(1,\ -4)}$$

La representación gráfica es la indicada en la figura.




De la observación de la figura se deduce que el área pedida es la siguiente:

$$S = \int_3^{-1} (x^2 - 2x - 3) \cdot dx = \left[ \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \right]_3^{-1} =$$

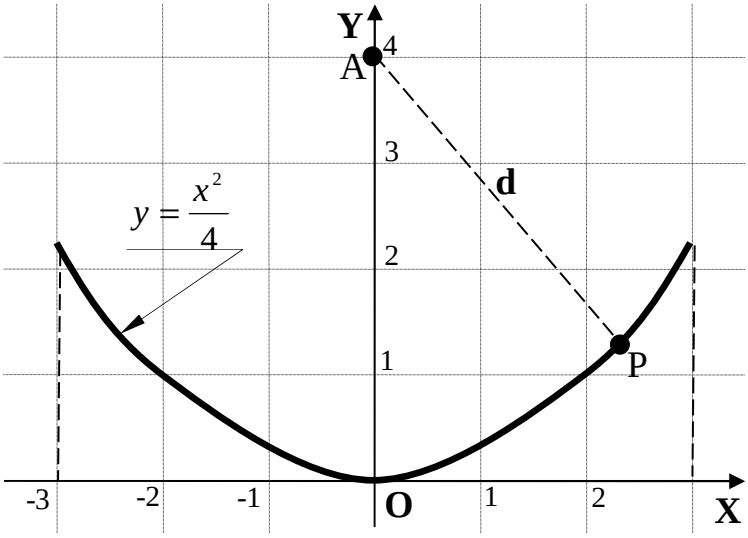
$$= \left[ \frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 - 3 \cdot (-1) \right] - \left[ \frac{3^3}{3} - 3^2 - 3 \cdot 3 \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} - 1 + 3 - 9 + 9 + 9 = 11 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}\ u^2 = S}}$$

**********

PROBLEMAS

1º) La ribera de un tramo de río describe la curva $y = \frac{x^2}{4}$, para x entre -3 y 3, y en el punto A(0, 4) hay un pueblo, tal como puede verse en el esquema siguiente:




a ) Expresa la distancia desde un punto cualquiera de esta orilla del río hasta el pueblo, en función de la abscisa x.

b ) ¿Cuál es el punto de la orilla de este tramo del río que está más cerca del pueblo?

c ) ¿Hay algún punto de la orilla del río a una distancia del pueblo inferior a 2?

---

a )

Las coordenadas del punto P, por pertenecer a la curva $y = \frac{x^2}{4}$ tiene por coordenadas $P\left(x,\ \frac{x^2}{4}\right)$. La distancia d pedida es la siguiente:

$$d = \overline{AP} = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-16}{4}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4 - 32x^2 + 256}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16x^2 + x^4 - 32x^2 + 256}{16}} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256} = d}}$$

b)

El punto más cercano es aquél cuya derivada de su distancia sea cero:

$$d' = \frac{1}{4} \cdot \frac{4x^3 - 32x}{2\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = \underline{\frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 - 8x}{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = d'}$$

$$d' = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3 - 8x}{\sqrt{x^4 - 16x^2 + 256}} = 0 \ ;;\ x^3 - 8x = 0 \ ;;\ x\left(x^2 - 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \ ;;\ x^2 - 8 = 0 \ ;;$$

$$\underline{x_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}} \ ;;\ \underline{x_3 = -2\sqrt{2}}$$

Para que la distancia sea mínima, la segunda derivada tiene que ser positiva:

$$d''=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2-8\right)\cdot\sqrt{x^4-16x^2+256}-\left(x^3-8x\right)\cdot\dfrac{4x^3-32x}{2\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{\left(\sqrt{x^4-16x^2+256}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2-8\right)\cdot\sqrt{x^4-16x^2+256}-\dfrac{x\left(x^2-8\right)\cdot 2x\left(x^2-8\right)}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{x^4-16x^2+256}=$$

$$d''=\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{\left(3x^2-8\right)\left(\sqrt{x^4-16x^2+256}\right)^2-2x^2\left(x^2-8\right)^2}{\sqrt{x^4-16x^2+256}}}{x^4-16x^2+256}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(3x^2-8\right)\left(x^4-16x^2+256\right)-2x^2\left(x^4-16x^2+64\right)}{\left(x^4-16x^2+256\right)\sqrt{x^4-16x^2+256}}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^6-48x^4+768x^2-8x^4+128x^2-2048-2x^6+32x^4-128x^2}{\left(x^4-16x^2+256\right)\sqrt{x^4-16x^2+256}}=$$

$$=\underline{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^6-24x^4+768x^2-2048}{\left(x^4-16x^2+256\right)\sqrt{x^4-16x^2+256}}=d''}$$

$$d''(0)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2048}{256\sqrt{256}}<0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Máximo para } x=0}$$

$$d''\left(2\sqrt{2}\right)=d''\left(-2\sqrt{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{8^3-24\cdot 8^2+768\cdot 8-2048}{\left(8^2-16\cdot 8+256\right)\sqrt{8^2-16\cdot 8+256}}=\frac{8^2\left(1-24+96-32\right)}{8^2\left(1-2+4\right)\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{97-56}{3\sqrt{3}}=\frac{41}{3\sqrt{3}}>0\ \Rightarrow\ \underline{\textit{Mínimos para } x=\pm 2\sqrt{2}}$$

*Los puntos del río más cercanos al pueblo son* $P_1\left(-2,\ 2\sqrt{2}\right)$ *y* $P_2\left(2,\ 2\sqrt{2}\right)$.

c )

La distancia de los puntos más próximos al pueblo es la siguiente:

$$d_{MÍNIMA}=\frac{1}{4}\sqrt{8^2-16\cdot 8+256}=\frac{1}{4}\sqrt{64-128+256}=\frac{1}{4}\sqrt{192}=\frac{1}{4}\sqrt{12\cdot 2^4}=\underline{\sqrt{12}=d_{MÏNIMA}}$$

*Por ser* $\sqrt{12}>2$, *no existen puntos de la orilla a menos de dos del pueblo.*

**********

2º) Sean el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 3$ y el punto P(1, 1, 0).

a ) Calcular la distancia d del punto P al plano $\pi$.

b ) Determina la ecuación del plano $\pi'$, paralelo a $\pi$, que también diste d del punto P.

c ) Determina la ecuación de la recta r perpendicular a $\pi$ que pasa por P.

d ) Calcula la intersección de la recta r con el plano $\pi$.

---

a )

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(P_0,\ \pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, que aplicada al punto $P(1,\ 1,\ 0)$ y al plano $\pi \equiv x - y + 2z - 3 = 0$, es:

$$d(P,\ \pi) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|1 - 1 + 0 - 3|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}\ u = d(P,\ \pi)}}$$

b )

El haz de planos paralelos al plano $\pi$ tiene por ecuación $\alpha \equiv x - y + 2z + k = 0$, siendo k un valor real.

Aplicando la fórmula, sabiendo que la distancia es $d = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$:

$$d(P,\ \alpha) = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{|1 - 1 + 0 + k|}{\sqrt{6}} = \frac{|k|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} \Rightarrow |k| = 3$$

De los dos valores posible de k, 3 y -3, es evidente que el valor -3 es para el plano conocido $\pi$, por lo cual el plano pedido es:

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x - y + 2z + 3 = 0}}$$

c )

La recta r, que contiene al punto P(1, 1, 0), tiene como vector director al vector normal del plano $\pi$: $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 2)$.

La recta r expresada por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}}}$$

d )

La intersección de la recta r y el plano $\pi$ se puede obtener diversas formas; una de las más sencillas es la siguiente:

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$ y un punto genérico de r es $Q(1+\lambda,\ 1-\lambda,\ 2\lambda)$.

El punto intersección tiene que satisfacer la ecuación del plano $\pi$:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x - y + 2z = 3 \\ Q(1+\lambda,\ 1-\lambda,\ 2\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)-(1-\lambda)+2\cdot(2\lambda)=3\ ;;\ 1+\lambda-1+\lambda+4\lambda=3\ ;;\ 6\lambda=3\ ;;$$

$$2\lambda = 1\ ;;\ \underline{\lambda = \frac{1}{2}} \Rightarrow Q\left(1+\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{2},\ 2\cdot\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right)}}$$

**********