

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****COMUNIDAD DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2002**

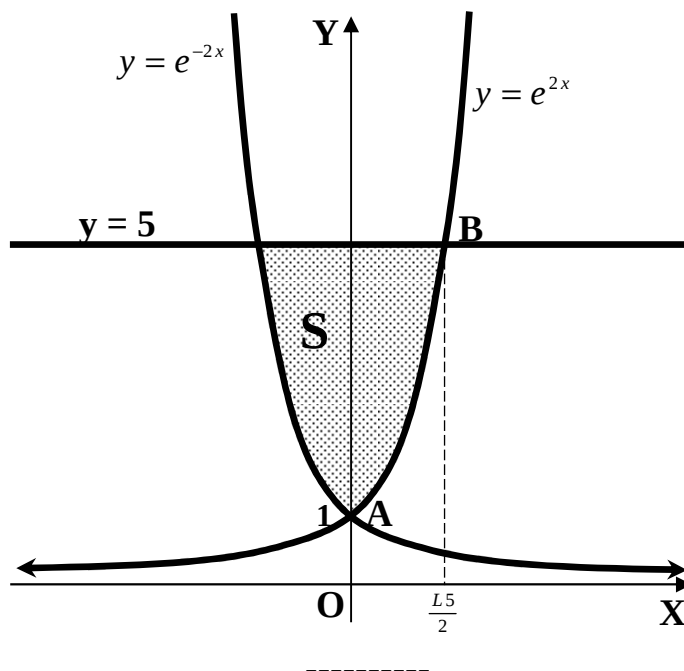
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

**CUESTIONES**

1º) Calcular el área comprendida entre las gráficas de las curvas  $y = e^{2x}$  e  $y = e^{-2x}$  y la recta de ecuación  $y = 5$ , representadas en el siguiente esquema.



El punto de corte de las dos curvas es:  $e^{2x} = e^{-2x} \Rightarrow x = 0$  ;;  $A(0, 1)$ .

El punto de corte de la curva  $y = e^{2x}$  con la recta  $y = 5$  es:

$$\left. \begin{array}{l} y = e^{2x} \\ y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow e^{2x} = 5 \;; \; 2x = L5 \;; \; x = \frac{L5}{2} \Rightarrow B\left(\frac{L5}{2}, 5\right).$$

Por ser el área simétrica con respecto al eje de ordenadas, la solución es:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{L5}{2}} (5 - e^{2x}) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x = \frac{L5}{2} \rightarrow t = L5 \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L5} (5 - e^t) \cdot dt =$$

$$= [5t - e^t]_0^{L5} = (5L5 - e^{L5}) - (5 \cdot 0 - e^0) = 5L5 - e^{L5} + 1 \cong 8'047 - 5 + 1 = \underline{\underline{4'05 \text{ u}^2 = S}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Sabiendo que la función  $y = (x + a)(x^2 - 4)$ , donde  $a$  es un número real, tiene un máximo y un mínimo relativos, y que el máximo se alcanza en el punto  $x = -\frac{1}{3}$ , hallar la abscisa del mínimo relativo.

-----

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando su primera derivada se hace cero:

$$y'(x) = 1 \cdot (x^2 - 4) + (a + x) \cdot 2x = x^2 - 4 + 2ax + 2x^2 = \underline{3x^2 + 2ax - 4 = y'}$$

$$y'(-\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{1}{3} - 4 = 0 \quad ;; \quad \frac{3}{9} - \frac{2a}{3} - 4 = 0 \quad ;; \quad 1 - 2a - 12 = 0 \quad ;; \quad \underline{a = -\frac{11}{2}}$$

$$\text{La función es } y = \left(x - \frac{11}{2}\right)(x^2 - 4) = \frac{2x - 11}{2} \cdot (x^2 - 4) = \frac{1}{2}(2x^3 - 8x - 11x^2 + 44) =$$

$$= \frac{1}{2}(2x^3 - 11x^2 - 8x + 44) = \underline{x^3 - \frac{11}{2}x^2 - 4x + 22 = y}$$

$$y'(x) = 3x^2 - 11x - 4 \quad ;; \quad y'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 0$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{121 + 48}}{6} = \frac{11 \pm \sqrt{169}}{6} = \frac{11 \pm 13}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La abscisa del máximo relativo es  $x = 4$

Comprobación de que se trata de un mínimo relativo:

$$y''(x) = 6x - 11 \quad ;; \quad y''(4) = 24 - 11 = 13 > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Mínimo, c.q.d.}}$$

\*\*\*\*\*

3°) Sea la función  $f(x) = \frac{mx-2}{x-1}$ , donde m es un parámetro.

a) Determinar para cada valor de m el valor de  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ , si existe.

b) ¿Para qué valores de m la derivada de la función f(x) es positiva para todos los valores de x?

-----

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\left(\frac{m}{2}x-1\right)}{x-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Para: } \begin{cases} \frac{m}{2} = 1 \;; \; \underline{m=2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2 = \underline{\underline{2}} \\ \frac{m}{2} > 1 \;; \; m > 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{>0}{0} = \underline{\underline{+\infty}} \\ \frac{m}{2} < 1 \;; \; m < 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{mx-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{<0}{0} = \underline{\underline{-\infty}} \end{cases}$$

b)

$$f'(x) = \frac{m(x-1) - (mx-2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{mx-m-mx+2}{(x-1)^2} = \frac{2-m}{(x-1)^2} = \underline{\underline{f'(x)}}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 2-m > 0 \;; \; \underline{m < 2}$$

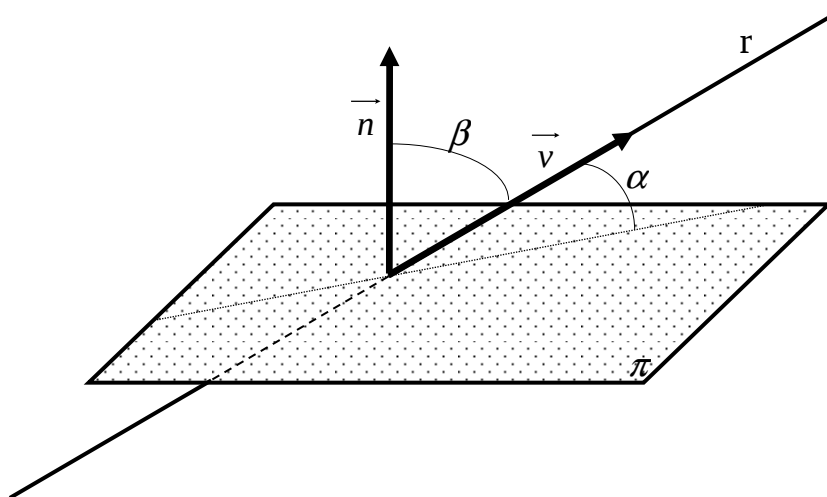
$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \; \forall m \in R, \; \{m < 2\}}}$$

\*\*\*\*\*

4º) Calcular el ángulo que forman el plano  $\pi \equiv x - 2y + z = 1$  y la recta  $r$  determinada por las siguiente ecuaciones paramétricas:  $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$ .

-----

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo  $\alpha$  que forman el plano  $\pi$  y la recta  $r$  es el complementario del ángulo que forman un vector  $\vec{v}$  director de  $r$  y un vector  $\vec{n}$ , normal al plano  $\pi$ .

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \quad (*)$$

Un vector director de  $r$  es  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  y un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, -2, 1)$ .

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(1, 1, 0) \cdot (1, -2, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1 - 2 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{12}} = -0'2887 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{arc. sen} |-0'2887| = \underline{\underline{16^\circ 46' 43'' = \alpha}}$$

Nota: Se ha tomado el seno en valor absoluto ya que se entiende el menor ángulo que forman la recta y el plano.

\*\*\*\*\*

## PROBLEMAS

1º) Considerar las rectas  $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$ .

a ) Calcular, de cada una de las rectas, un punto y un vector director.

b ) Determinar, si existen, cada uno de los siguientes objetos y en caso afirmativo calcular su ecuación:

i ) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r.

ii ) El plano perpendicular a la recta s que contiene a la recta r.

iii ) La recta t, perpendicular a las rectas r y s que pasa por O(0, 0, 0).

-----

a )

Expresamos, en primer lugar, las rectas por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \;; \; \underline{y = 3 + \lambda} \;; \; \underline{z = 2 + 2\lambda} \Rightarrow r \equiv \underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;; \; \underline{y = -\frac{1}{3}} \;; \; \underline{x = 3 + 2\lambda} \Rightarrow s \equiv \underline{\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de r pueden ser:  $A(0, 3, 2)$  y  $\vec{u} = (1, 1, 2)$

Un punto y un vector de s pueden ser:  $B\left(3, -\frac{1}{3}, 0\right)$  y  $\vec{v} = (2, 0, 1)$

b )

i ) El plano pedido  $\pi_1$ , tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas r y s y un punto de r:

$$\pi_1(A; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;; \; x + 4(y-3) - 2(z-2) - (y-3) = 0 \;;$$

$$x + 3(y-3) - 2z + 4 = 0 \;; \; x + 3y - 9 - 2z + 4 = 0 \;; \; \underline{\underline{\pi_1 \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0}}$$

ii ) El plano pedido  $\pi_2$ , se puede definir con el vector perpendicular común a los vectores directores de las rectas r y s, un vector director de la recta r y un punto de r:

Un vector  $\vec{w}$  perpendicular común a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  es su producto vectorial:

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j - 2k - j = i + 3j - 2k \Rightarrow \underline{\vec{w} = (1, 3, -2)}.$$

$$\pi_2(A; \vec{w}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad 6x + (z-2) - 2(y-3) - 3(z-2) + 2x - 2(y-3) = 0$$

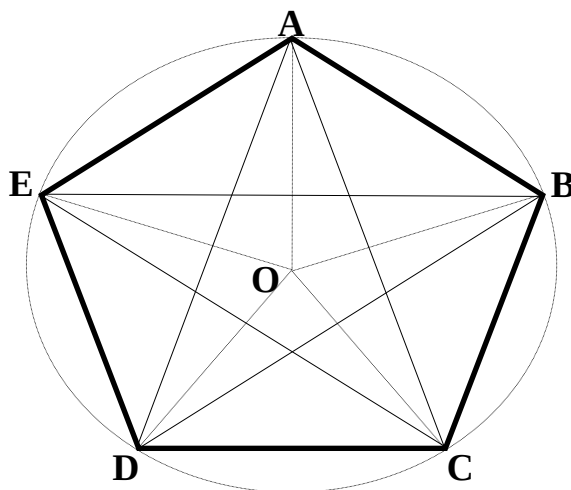
$$8x - 4y + 12 - 2z + 4 = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv 4x - 2y - z + 8 = 0}}$$

iii ) La recta pedida t, tiene como vector director a  $\vec{w}$ , perpendicular común a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  y pasa por el punto O(0, 0, 0):

$$\left. \begin{matrix} \vec{w} = (1, 3, -2) \\ O(0, 0, 0) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 3, -2)}} \quad \text{o} \quad t \equiv \underline{\underline{\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}}$$

\*\*\*\*\*

2º) Sobre una circunferencia de radio un metro y centro en el punto O, consideramos los cinco vértices A, B, C, D y E de un pentágono regular, tal como indica la figura.



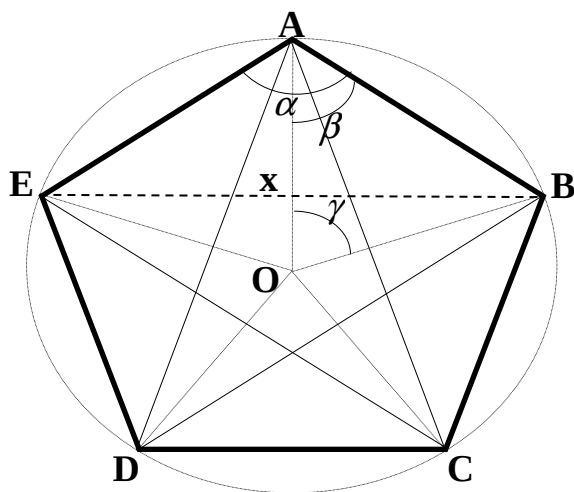
(donde se han dibujado también los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ , y  $\overline{DE}$ ; las diagonales  $\overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{DA}$ , y  $\overline{EB}$  y los radios que acaban en cada vértice  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ ,  $\overline{OD}$  y  $\overline{OE}$ ).

Calcular:

- El ángulo que forman el radio que acaba en el vértice A con el lado  $\overline{AB}$  y el ángulo que forman el vértice A los dos lados que lo tienen como extremo (es decir, el ángulo A entre los lados  $\overline{EA}$  y  $\overline{AB}$ ).
- La longitud de cada uno de los lados del pentágono.
- La longitud de cualquiera de las diagonales (por ejemplo,  $\overline{EB}$ ).

-----

a)



Por ser un polígono regular tiene todos sus ángulos iguales. Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{180^\circ \cdot (5 - 2)}{5} = \frac{540^\circ}{5} = \underline{\underline{108^\circ = \alpha}}$$

El ángulo  $\beta$  que forma el radio con el lado es la mitad del ángulo  $\alpha$ , es decir:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{108^\circ}{2} = \underline{\underline{54^\circ = \beta}}$$

b)

Teniendo en cuenta que el radio es un metro, aplicando el teorema del coseno al triángulo OAB, en el cual el ángulo  $\gamma$  es:  $\gamma = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ , resulta:

$$\begin{aligned} l^2 &= r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 72^\circ = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 72^\circ = 2r^2 (1 - \cos 72^\circ) = 2 \cdot 1^2 \cdot (1 - 0'3090) = \\ &= 2 \cdot 0'6910 = 1'38 \quad ; \quad l = \sqrt{1'38} = \underline{\underline{1'18 \text{ metros} = l}} \end{aligned}$$

c)

Aplicando de nuevo el teorema del coseno al triángulo AEB:

$$\begin{aligned} \overline{EB}^2 &= x^2 = l^2 + l^2 - 2l \cdot l \cdot \cos 108^\circ = 2l^2 - 2l^2 \cdot \cos 108^\circ = 2l^2 (1 - \cos 108^\circ) = \\ &= 2 \cdot 1'38 \cdot (1 + 0'3090) = 2 \cdot 1'38 \cdot 1'309 = 3'613 \quad ; \quad l = \sqrt{3'613} = \underline{\underline{1'90 \text{ metros} = x = \overline{EB}}} \end{aligned}$$

\*\*\*\*\*