PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2002

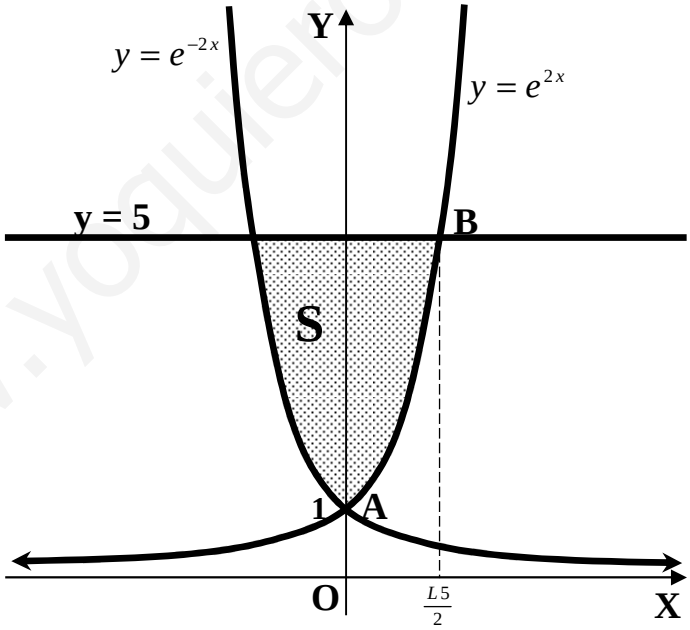
(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1º) Calcular el área comprendida entre las gráficas de las curvas $y = e^{2x}$ e $y = e^{-2x}$ y la recta de ecuación y = 5, representadas en el siguiente esquema.



El punto de corte de las dos curvas es: $e^{2x} = e^{-2x} \Rightarrow x = 0$;; $A(0,\ 1)$.

El punto de corte de la curca $y = e^{2x}$ con la recta y = 5 es:

$$\left.\begin{array}{l} y = e^{2x} \\ y = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{2x} = 5 \ ;;\ 2x = L5 \ ;;\ x = \frac{L5}{2} \ \Rightarrow\ B\left(\frac{L5}{2},\ 5\right).$$

www.yoquieroaprobar.es

Por ser el área simétrica con respecto al eje de ordenadas, la solución es:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\frac{L5}{2}} \left(5 - e^{2x}\right) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \middle\| \begin{array}{c} x = \frac{L5}{2} \to t = L5 \\ x = 0 \to t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow S = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{L5} \left(5 - e^{t}\right) \cdot dt =$$

$$= \left[5t - e^{t}\right]_0^{L5} = \left(5L5 - e^{L5}\right) - \left(5 \cdot 0 - e^{0}\right) = 5L5 - e^{L5} + 1 \cong 8'047 - 5 + 1 = \underline{\underline{4'05\ u^2 = S}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sabiendo que la función $y=(x+a)(x^2-4)$, donde a es un número real, tiene un máximo y un mínimo relativos, y que el máximo se alcanza en el punto $x=-\frac{1}{3}$, hallar la abscisa del mínimo relativo.

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando su primera derivada se hace cero:

$$y'(x)=1\cdot(x^2-4)+(a+x)\cdot 2x=x^2-4+2ax+2x^2=\underline{3x^2+2ax-4=y'}$$

$$y'(-\tfrac{1}{3})=0\Rightarrow 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2-2a\cdot\frac{1}{3}-4=0\ ;;\ \frac{3}{9}-\frac{2a}{3}-4=0\ ;;\ 1-2a-12=0\ ;;\ \underline{a=-\frac{11}{2}}$$

La función es $y=\left(x-\frac{11}{2}\right)(x^2-4)=\frac{2x-11}{2}\cdot(x^2-4)=\frac{1}{2}(2x^3-8x-11x^2+44)=$

$$=\frac{1}{2}(2x^3-11x^2-8x+44)=\underline{x^3-\frac{11}{2}x^2-4x+22=y}$$

$$y'(x)=3x^2-11x-4\ ;;\ y'(x)=0\Rightarrow 3x^2-11x-4=0$$

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121+48}}{6}=\frac{11\pm\sqrt{169}}{6}=\frac{11\pm 13}{6}\Rightarrow\begin{cases}\underline{x_1=4}\\ \underline{x_2=-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

<u>La abscisa del máximo relativo es x = 4</u>

Comprobación de que se trata de un mínimo relativo:

$$y''(x)=6x-11\ ;;\ y''(4)=24-11=13>0\Rightarrow \underline{\underline{Mínimo,\ c.q.d.}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

3º) Sea la función $f(x)=\dfrac{mx-2}{x-1}$, donde m es un parámetro.

a) Determinar para cada valor de m el valor de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, si existe.

b) ¿Para qué valores de m la derivada de la función f(x) es positiva para todos los valores de x?

---

a)

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{mx-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2\left(\frac{m}{2}x-1\right)}{x-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Para:\begin{cases}\dfrac{m}{2}=1\ ;;\ \underline{m=2}\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}2=\underline{\underline{2}}\\[2ex] \dfrac{m}{2}>1\ ;;\ m>2\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{>0}{0}=\underline{\underline{+\infty}}\\[2ex] \dfrac{m}{2}<1\ ;;\ m<2\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{mx-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{<0}{0}=\underline{\underline{-\infty}}\end{cases}$$

b)

$$f'(x)=\frac{m(x-1)-(mx-2)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{mx-m-mx+2}{(x-1)^2}=\underline{\frac{2-m}{(x-1)^2}=f'(x)}$$

$$f'(x)>0\Rightarrow 2-m>0\ ;;\ \underline{m<2}$$

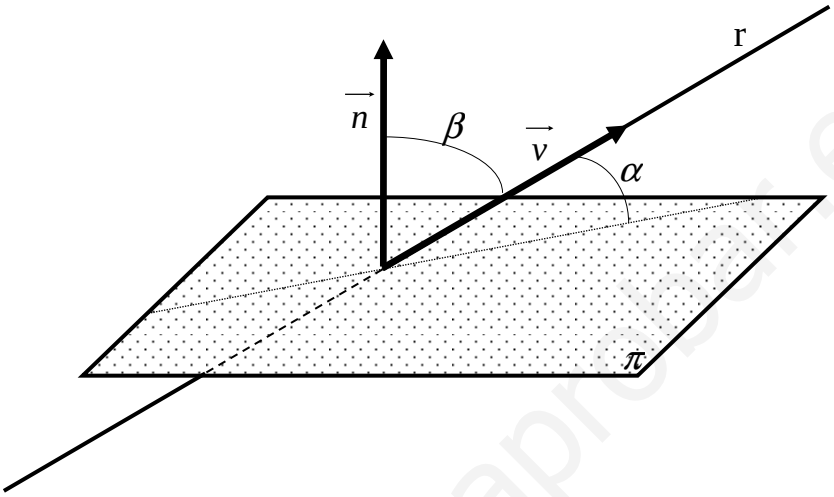
$$\underline{\underline{f'(x)>0\ \ \forall m\in R,\ \{m<2\}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4º) Calcular el ángulo que forman el plano $\pi \equiv x - 2y + z = 1$ y la recta r determinada por las siguiente ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 \end{cases}$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector $\vec{v}$ director de r y un vector $\vec{n}$, normal al plano π.

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} \qquad (*)$$

Un vector director de r es $\vec{v} = (1,\ 1,\ 0)$ y un vector normal de π es $\vec{n} = (1,\ -2,\ 1)$.

$$\cos\beta = sen\ \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{\left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|} = \frac{(1,\ 1,\ 0) \cdot (1,\ -2,\ 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{1 - 2 + 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{-1}{\sqrt{12}} = -0'2887 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = arc.\ sen\left|-0'2887\right| = \underline{\underline{16^o\ \ 46'\ \ 43'' = \alpha}}$$

<u>Nota</u>: Se ha tomado el seno en valor absoluto ya que se entiende el menor ángulo que forman la recta y el plano.

****

www.yoquieroaprobar.es

PROBLEMAS

1º) Considerar las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases}$.

a) Calcular, de cada una de las rectas, un punto y un vector director.

b) Determinar, si existen, cada uno de los siguientes objetos y en caso afirmativo calcular su ecuación:

i) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r.

ii) El plano perpendicular a la recta s que contiene a la recta r.

iii) La recta t, perpendicular a las rectas r y s que pasa por O(0, 0, 0).

---

a)

Expresamos, en primer lugar, las rectas por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x - y + 3 = 0 \\ 2x - z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x = \lambda} \;;;\; \underline{y = 3 + \lambda} \;;;\; \underline{z = 2 + 2\lambda} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}}$$

$$s \equiv \begin{cases} 3y + 1 = 0 \\ x - 2z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;;;\; \underline{y = -\frac{1}{3}} \;;;\; \underline{x = 3 + 2\lambda} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un punto y un vector de r pueden ser: $\underline{\underline{A(0,\ 3,\ 2)\ y\ \vec{u} = (1,\ 1,\ 2)}}$

Un punto y un vector de s pueden ser: $\underline{\underline{B\left(3,\ -\frac{1}{3},\ 0\right)\ y\ \vec{v} = (2,\ 0,\ 1)}}$

b)

i) El plano pedido π_1, tiene como vectores directores a los vectores directores de las rectas r y s y un punto de r:

$$\pi_1\left(A;\ \vec{u},\ \vec{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;;\; x + 4(y-3) - 2(z-2) - (y-3) = 0 \;;;$$

$$x + 3(y-3) - 2z + 4 = 0 \;;;\; x + 3y - 9 - 2z + 4 = 0 \;;;\; \underline{\underline{\pi_1 \equiv x + 3y - 2z - 5 = 0}}$$

www.yoquieroaprobar.es

ii) El plano pedido π_2, se puede definir con el vector perpendicular común a los vectores directores de las rectas r y s, un vector director de la recta r y un punto de r:

Un vector $\overrightarrow{w}$ perpendicular común a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ es su producto vectorial:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j - 2k - j = i + 3j - 2k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{w} = (1,\ 3,\ -2)}.$$

$$\pi_2\left(A;\ \overrightarrow{w},\ \overrightarrow{v}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 6x + (z-2) - 2(y-3) - 3(z-2) + 2x - 2(y-3) = 0$$

$$8x - 4y + 12 - 2z + 4 = 0 \ ;;\ \underline{\underline{\pi_2 \equiv 4x - 2y - z + 8 = 0}}$$

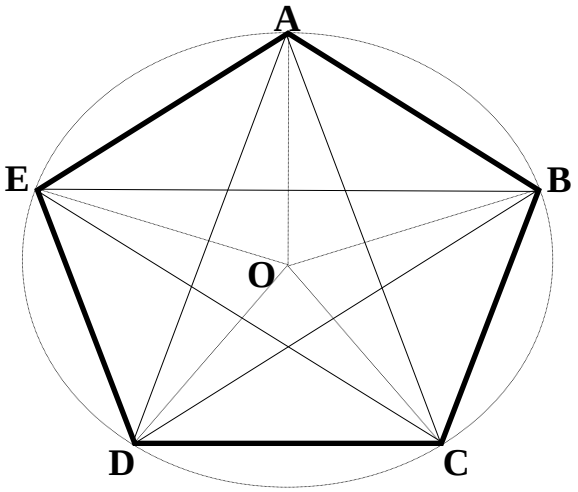
iii) La recta pedida t, tiene como vector director a $\overrightarrow{w}$, perpendicular común a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ y pasa por el punto O(0, 0, 0):

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w} = (1,\ 3,\ -2) \\ O(0,\ 0,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv (x,\ y,\ z) = (0,\ 0,\ 0) + \lambda(1,\ 3,\ -2)}} \ o \ \underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sobre una circunferencia de radio un metro y centro en el punto O, consideramos los cinco vértices A, B, C, D y F de un pentágono regular, tal como indica la figura.



(donde se han dibujado también los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, y $\overline{DE}$; las diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DA}$, y $\overline{EB}$ y los radios que acaban en cada vértice $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OD}$ y $\overline{OE}$).

Calcular:

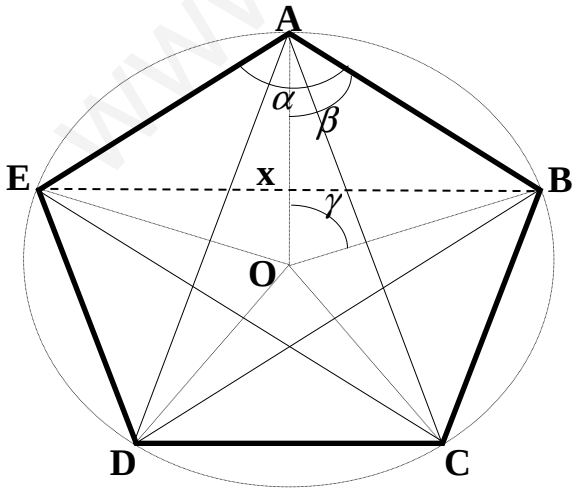
a) El ángulo que forman el radio que acaba en el vértice A con el lado $\overline{AB}$ y el ángulo que forman el vértice A los dos lados que lo tienen como extremo (es decir, el ángulo A entre los lados $\overline{EA}$ y $\overline{AB}$).

b) La longitud de cada uno de los lados del pentágono.

c) La longitud de cualquiera de las diagonales (por ejemplo, $\overline{EB}$).

---

a)



Por ser un polígono regular tiene todos sus ángulos iguales. Por lo tanto:

$$\alpha = \frac{180^{\circ} \cdot (5-2)}{5} = \frac{540^{\circ}}{5} = \underline{\underline{108^{\circ} = \alpha}}$$

El ángulo β que forma el radio con el lado es la mitad del ángulo α, es decir:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} = \frac{108^{\circ}}{2} = \underline{\underline{54^{\circ} = \beta}}$$

www.yoquieroaprobar.es

b)

Teniendo en cuenta que el radio es un metro, aplicando el teorema del coseno al triángulo OAB, en el cual el ángulo γ es: $\gamma = \frac{360^o}{5} = 72^o$, resulta:

$$l^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 72^o = 2r^2 - 2r^2 \cdot \cos 72^o = 2r^2 \left(1 - \cos 72^o\right) = 2 \cdot 1^2 \cdot \left(1 - 0'3090\right) =$$

$$= 2 \cdot 0'6910 = 1'38 \;;;\; l = \sqrt{1'38} = \underline{\underline{1'18 \; metros = l}}$$

c)

Aplicando de nuevo el teorema del coseno al triángulo AEB:

$$\overline{EB}^2 = x^2 = l^2 + l^2 - 2l \cdot l \cdot \cos 108^o = 2l^2 - 2l^2 \cdot \cos 108^o = 2l^2 \left(1 - \cos 108^o\right) =$$

$$= 2 \cdot 1'38 \cdot \left(1 + 0'3090\right) = 2 \cdot 1'38 \cdot 1'309 = 3'613 \;;;\; l = \sqrt{3'613} = \underline{\underline{1'90 \; metros = x = \overline{EB}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es