

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****JUNIO – 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1º) Calcular la primitiva de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$ que se anula para $x = 2$.

$$F(x) = \int x \cdot \sqrt{x^2 - 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 - 1 = 2 \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow F(t) = \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} t \sqrt{t} + C = F(t) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{3} (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1} + C$$

$$F(2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} (2^2 - 1) \sqrt{2^2 - 1} + C = 0 \;; \; \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + C = 0 \;; \; \underline{C = -\sqrt{3}}$$

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{3} (x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{3}}}$$

2º) Determinar el valor de k para que la función $f(x) = \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2}$ tenga límite cuando x tiende a 2, es decir, que exista $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, y calcular el valor de este límite.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3kx + 5}{x - 2} = k \Rightarrow 2x^2 - 3kx + 5 = (x - 2)(2x + a) = 2x^2 + ax - 4x - 2a =$$

$$= 2x^2 + (a - 4)x + (-2a) \Rightarrow \begin{cases} -2a = 5 \;; \; a = -\frac{5}{2} \\ a - 4 = -3k \;; \; k = \frac{a - 4}{-3} = \frac{-\frac{5}{2} - 4}{-3} = \frac{\frac{-5 - 8}{2}}{-3} = \frac{\frac{-13}{2}}{-3} = \frac{13}{6} = k \end{cases}$$

El valor de k también se puede obtener aplicando la Regla de Ruffini:

2	2	-3k	5
2	2	4	8 - 6k
	2	4 - 3k	13 - 6k = 0

$$k = \frac{13}{6}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3 \cdot \frac{13}{6}x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - \frac{13}{2}x + 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 13x + 10}{2(x - 2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 13x + 10 = 0 \;; \; x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 160}}{8} = \frac{13 \pm \sqrt{9}}{8} = \frac{13 \pm 3}{8} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)\left(x - \frac{5}{4}\right)}{2(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \frac{5}{4}}{2} = \frac{2 - \frac{5}{4}}{2} = \frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{8}$$

3º) Se consideran los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 3$ y $\pi_2 \equiv ax + (a - 2)y + 2z = 4$.

a) ¿Hay algún valor del parámetro a para el cual la intersección de los planos π_1 y π_2 no determinan una recta?

b) Calcular un vector director de la recta que se obtiene cuando se hace la intersección de los planos π_1 y π_2 para el valor del parámetro $a = 0$.

a)

Dos planos no determinen una recta cuando son coincidentes o paralelos.

Dos planos son coincidentes cuando son proporcionales todos sus coeficientes y también los términos independientes:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{a-2} = \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\pi_1 \text{ y } \pi_2 \text{ no son coincidentes.}}$$

Para que dos planos sean paralelos tiene que ser proporcionales todos sus coeficientes y no proporcionales los términos independientes:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{a-2} = \frac{-1}{2} \neq \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{-1}{2} \quad ;; \quad \underline{a = -2} \\ \frac{2}{a-2} = \frac{-1}{2} \quad ;; \quad 4 = -a + 2 \quad ;; \quad \underline{a = -2} \end{cases}$$

Los planos π_1 y π_2 no determinan una recta para $a = -2$

b)

Para $a = 0$ los planos determinan la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -2y + 2z = 4 \end{cases}$, que simplificando resulta $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -y + z = 2 \end{cases}$.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \quad ;; \quad \underline{z = 2 + \lambda} \quad ;; \quad x = 3 - 2\lambda + 2 + \lambda = \underline{5 - \lambda} = x$$

$$r \equiv \begin{cases} x = 5 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad \text{Un vector director de } r \text{ es } \underline{\underline{\vec{v} = (-1, 1, 1)}}$$

4º) Se considera la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y - 5}{-3} = \frac{z - 7}{-4}$. Calcular los puntos de r situados a una distancia de 3 unidades del punto P(1, 0, 1).

La recta r mediante unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - 3\lambda \\ z = 7 - 4\lambda \end{cases}$ y un punto genérico de r es $Q(1 + \lambda, 5 - 3\lambda, 7 - 4\lambda)$.

$$\overline{PQ} = 3 \Rightarrow \sqrt{(1 + \lambda - 1)^2 + (5 - 3\lambda - 0)^2 + (7 - 4\lambda - 1)^2} = 3 \quad ; ; \quad \lambda^2 + (5 - 3\lambda)^2 + (6 - 4\lambda)^2 = 9 \quad ; ;$$

$$\lambda^2 + 25 - 30\lambda + 9\lambda^2 + 36 - 48\lambda + 16\lambda^2 = 9 \quad ; ; \quad 26\lambda^2 - 78\lambda + 52 = 0 \quad ; ; \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \quad ; ;$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + \lambda_1 = 1 + 2 = 3 \\ y_1 = 5 - 3\lambda_1 = 5 - 6 = -1 \\ z_1 = 7 - 4\lambda_1 = 7 - 8 = -1 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Q_1(3, -1, -1)}} \\ \lambda_2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 + \lambda_2 = 1 + 1 = 2 \\ y_2 = 5 - 3\lambda_2 = 5 - 3 = 2 \\ z_2 = 7 - 4\lambda_2 = 7 - 4 = 3 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{Q_2(2, 2, 3)}} \end{cases}$$

PROBLEMAS

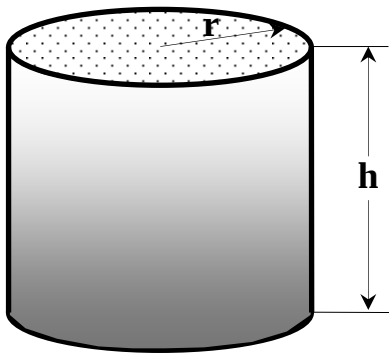
1º) Se tiene que construir un gran depósito cilíndrico de $81\pi \text{ cm}^3$ de volumen. La superficie lateral tiene que ser construida con un material que cuesta 30 euros el m^2 y las dos bases con un material que cuesta 45 euros el m^2 .

a) Determinar la relación que habrá entre el radio r de las bases circulares y la altura h del cilindro, y calcular el costo $C(r)$ del material necesario para construir este depósito en función de r .

b) ¿Qué dimensiones (radio y altura) ha de tener el depósito para que el coste del material necesario para construirlo sea el mínimo posible?

c) ¿Cuál será, en este caso, el coste del material?

a)



$$V = \pi r^2 h = 81\pi \Rightarrow h = \frac{81}{r^2}$$

$$\text{Coste} = C = 2 \cdot \pi r^2 \cdot 45 + 2\pi r h \cdot 30 = 30\pi r(3r + 2h) =$$

$$= 30\pi r \left(3r + 2 \cdot \frac{81}{r^2} \right) = 30\pi r \cdot \frac{3r^3 + 162}{r^2} =$$

$$= \frac{30\pi(3r^3 + 162)}{r} = \frac{90\pi(r^3 + 54)}{r} = \underline{\underline{C(r)}}$$

b)

Para que el coste sea mínimo, su derivada tiene que ser cero:

$$C'(r) = 90\pi \cdot \frac{3r^2 \cdot r - (r^3 + 54) \cdot 1}{r^2} = 90\pi \cdot \frac{3r^3 - r^3 - 54}{r^2} = 90\pi \cdot \frac{2r^3 - 54}{r^2} =$$

$$= \underline{\underline{180\pi \cdot \frac{r^3 - 27}{r^2} = C'(r)}} \quad ; ; \quad C'(r) = 0 \Rightarrow r^3 - 27 = 0 \quad ; ; \quad \underline{r = 3} \quad ; ; \quad h = \frac{81}{r^2} = \frac{81}{3^2} = \underline{9 = h}$$

La altura es de 9 cm y el radio de 3 cm.

Justificación de que se trata de un mínimo:

$$C''(r) = 180\pi \cdot \frac{3r^2 \cdot r^2 - (r^3 - 27) \cdot 2r}{r^4} = 180\pi \cdot \frac{3r^3 - 2r^3 + 54}{r^3} = \underline{\underline{180\pi \cdot \frac{r^3 + 54}{r^3} = C''(r)}}$$

$$C''(3) = 180\pi \cdot \frac{3^3 + 54}{3^3} = 180\pi \cdot (1 + 2) = 540\pi > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo, c.q.j.}}}$$

c)

$$C(r) = 90\pi \cdot \frac{r^3 + 54}{r} \Rightarrow C(3) = 90\pi \cdot \frac{3^3 + 54}{3} = 90\pi \cdot (9 + 18) = 2430 \cdot \pi = 2430 \cdot 3'14 =$$
$$= \underline{7634'07} = C(3)$$

El coste del depósito es de 7.634'07 euros.

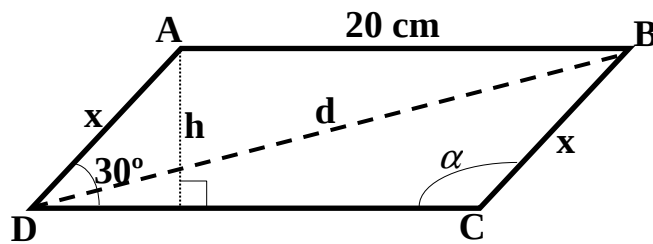
2º) De un paralelogramo sabemos que el lado más largo mide 20 cm, que su área es de 120 cm^2 y que el ángulo menor vale 30° . Determinar:

a) El valor del otro ángulo del paralelogramo.

b) La longitud del lado pequeño.

c) Lo que mide la diagonal larga.

a)



Se sabe que la suma de los ángulos interiores de un paralelogramo es de 360° y que son iguales dos a dos, por lo tanto es:

$$\alpha + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 150^\circ}}$$

b)

Sabiendo que la superficie es de 120 cm^2 :

$$S = 20 \cdot h = 120 \quad ; \quad h = \frac{120}{20} = \underline{6 \text{ cm}} = h. \quad \text{sen } 30^\circ = \frac{h}{x} = \frac{6}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{6}{x} \quad ; \quad \underline{\underline{x = 12 \text{ cm}}}$$

c)

Aplicando el teorema del coseno al triángulo ABD resulta:

$$d^2 = 12^2 + 20^2 - 2 \cdot 12 \cdot 20 \cdot \cos 150^\circ = 144 + 400 - 480 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 544 + 240 \cdot \sqrt{3} =$$

$$= 544 + 240 \cdot 1.732 = 959.692 \quad ; \quad d = \sqrt{959.692} = \underline{\underline{30.98 \text{ cm} = d}}$$
