PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

1º) Dada la función $f(x)=(2x+1)e^{x^2+x}$, determinar una función g(x) tal que g’(x) = f(x) (es decir, una primitiva de f(x)) y que su gráfica pasa por el punto P(0, 2).

$$g(x)=\int f(x \cdot dx=\int(2x+1)e^{x^2+x}\cdot dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} x^2+x=t \\ (2x+1)dx=dt \end{Bmatrix} \Rightarrow g'(x)=\int e^t\,dt=e^t+C=$$

$$=\underline{e^{x^2+x}+C=g(x)}$$

Por contener g’(x) al punto P(0, 2) tiene que satisfacer su ecuación:

$$g(0)=2 \Rightarrow e^0+C=2 \;\;;;\;\; 1+C=2 \;\;;;\;\; \underline{C=1}$$

$$\underline{\underline{g(x)=e^{x^2+x}+1}}$$

****

2º) Calcular el punto de la curva $y = 2 + x - x^2$ donde la tangente es paralela a la recta r de ecuación y = x.

La pendiente de la tangente a una curva en un punto es la derivada de la curva en ese punto.

La pendiente de la recta r (bisectriz de los cuadrantes primero y tercero) es m = 1.

$$y' = 1 - 2x = m = 1 \;\; ;; \;\; 1 - 2x = 1 \;\; ;; \;\; 2x = 0 \;\; ;; \;\; \underline{x = 0} \;\; ;; \;\; y(0) = 2 \Rightarrow \underline{P(0,\ 2)}$$

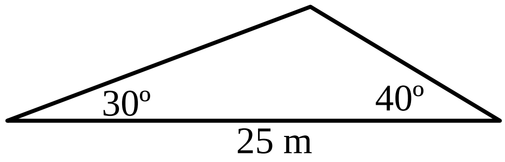
La ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

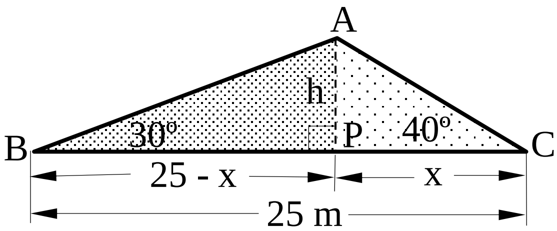
Aplicada al punto y la pendiente determinados es como sigue:

$$t \equiv y - 2 = 1(x - 0) \;\; ;; \;\; y - 2 = x \;\; ;; \;\; \underline{\underline{t \equiv x - y + 2 = 0}}$$

****

3º) Calcular el área del triángulo de la figura.





Considerando los triángulos rectángulos ABP y APC podemos establecer:

$$tag\ 30º = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{h}{25-x} \ ;; \ tag\ 40º = \frac{h}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{h}{25-x} \ \Rightarrow \ 25 - x = \dfrac{3h}{\sqrt{3}} \ ;; \ \underline{x = 25 - \dfrac{3h}{\sqrt{3}}} \\ \\ tag\ 40º = \dfrac{h}{x} \ ;; \ \underline{x = \dfrac{h}{tag\ 40º}} \end{array}\right\} \Rightarrow \ 25 - \frac{3h}{\sqrt{3}} = \frac{h}{tag\ 40º} \ ;;$$

$$25\sqrt{3} \cdot tag\ 40º - 3h \cdot tag\ 40º = \sqrt{3}\,h \ ;; \ \sqrt{3}\,h + 3h \cdot tag\ 40º = 25\sqrt{3} \cdot tag\ 40º \ ;;$$

$$h\left(\sqrt{3} + 3tag\ 40º\right) = 25\sqrt{3} \cdot tag\ 40º \ ;; \ h = \frac{25\sqrt{3} \cdot tag\ 40º}{\sqrt{3} + 3tag\ 40º} = \frac{25 \cdot 1'7321 \cdot 0'8391}{1'7321 + 3 \cdot 0'8391} = \frac{36'3341}{4'2493} =$$

$$= \underline{8'55\ m = h}$$

El área del triángulo es:

$$S = \frac{base \cdot altura}{2} = \frac{25 \cdot 8'55}{2} = \underline{\underline{106'88\ m^2 = S}}$$

****

4º) Se consideran los puntos $A(0,\ -2a-1,\ 4a-2),\ B(1,\ -3,\ 4)\ y\ C(3,\ -5,\ 3)$.

a) Comprobar que el triángulo de vértices A, B y C es rectángulo en B para cualquier valor real de a.

b) Calcular el valor de a que hace que el triángulo sea isósceles.

----

a)

Este apartado se puede resolver de diferentes formas; vamos a resolverlo teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}\ \ y\ \ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$ son perpendiculares.

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -3,\ 4) - (0,\ -2a-1,\ 4a-2) = (1,\ 2a-2,\ 6-4a)$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC} = C - B = (3,\ -5,\ 3) - (1,\ -3,\ 4) = (2,\ -2,\ -1)$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (1,\ 2a-2,\ 6-4a)\cdot(2,\ -2,\ -1) = 2 - 2\cdot(2a-2) - (6-4a) = 2 - 4a + 4 - 6 + 4a = 0$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \ \Rightarrow\ \overline{AB} \perp \overline{BC}\ \ \forall a \in R,\ \ c.q.c.}}$$

b)

Para que el triángulo sea isósceles tiene que ser $\overline{AB} = \overline{BC}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-0)^2 + (-3+2a+1)^2 + (4-4a+2)^2} = \sqrt{1^2 + (2a-2)^2 + (6-4a)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 4a^2 - 8a + 4 + 36 - 48a + 16a^2} = \underline{\sqrt{20a^2 - 56a + 41} = \overline{AB}}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-1)^2 + (-5+3)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = \underline{3 = \overline{BC}}$$

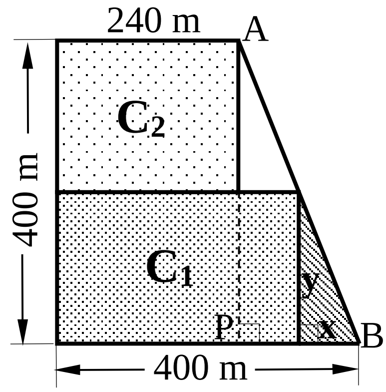
$$\overline{AB} = \overline{BC} \ \Rightarrow\ \sqrt{20a^2 - 56a + 41} = 3\ ;;\ 20a^2 - 56a + 41 = 9\ ;;\ 20a^2 - 56a + 32 = 0\ ;;$$

$$5a^2 - 14a + 8 = 0\ ;;\ a = \frac{14 \pm \sqrt{196-160}}{10} = \frac{14 \pm \sqrt{36}}{10} = \frac{14 \pm 6}{10} \ \Rightarrow\ \begin{cases} \underline{a_1 = 2} \\ \underline{a_2 = \frac{4}{5}} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{El\ \ triángulo\ \ es\ isósceles\ \ cuando\ \ a = 2\ \ y\ \ también\ \ cuando\ \ a = \frac{4}{5}}}$$

****

5º) Un campo tiene forma de trapecio rectángulo, de bases 240 y 400 m y el lado perpendicular a las bases mide también 400 m. Se divide tal como indica la figura por dos campos rectangulares C_1 y C_2. Denominamos x e y a los valores de los catetos de uno de los triángulos rectángulos que se forman



a) Comprobar que $y = \frac{5}{2}x$.

b) Utilizando la igualdad anterior, escribir la suma de las áreas de los dos campos en función de x.

c) El campo C_1 se quiere sembrar con maíz y el campo C_2 con trigo. Con el maíz se obtiene un beneficio de 0'12 euros por metro cuadrado y con el trigo un beneficio de 0'10 euros por metro cuadrado. Determinar las medidas de cada uno de los campos para obtener el beneficio máximo.

----

a)

El triángulo seccionado y el de vértices APB son semejantes por ser rectángulos y además tienen los lados paralelos (están en posición de Thales), por lo cual puede establecerse la siguiente relación:

$$\frac{y}{400} = \frac{x}{400-240} \;;\; \frac{y}{400} = \frac{x}{160} \;;\; \frac{y}{5} = \frac{x}{2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{y = \frac{5}{2}x,\ c.q.d.}}$$

b)

Las áreas de cada uno de los rectángulos son:

$$C_1 \;\Rightarrow\; S_1 = (400-x)\cdot y = (400-x)\cdot\frac{5}{2}x = \underline{1000x - \frac{5}{2}x^2 = S_1}$$

$$C_2 \;\Rightarrow\; S_2 = 240\cdot(400-y) = 240\cdot\left(400-\frac{5}{2}x\right) = \underline{96.000 - 600x = S_2}$$

$$S = S_1 + S_2 = 1000x - \frac{5}{2}x^2 + 96.000 - 600x = \underline{\underline{-\frac{5}{2}x^2 + 400x + 96.000 = S}}$$

c)

El beneficio (B) que se obtiene, en función de x, es el siguiente:

$$B(x) = 0'12\cdot\left(1000x - \frac{5}{2}x^2\right) + 0'10\cdot(96.000 - 600x) = (120x - 0'30x^2) + (9.600 - 60x) =$$

$$= \underline{(-0'30x^2 + 60x + 9.600)\ Euros = B(x)}$$

El beneficio será máximo cuando su derivada sea cero:

$$B'(x) = -0'6x + 60 = 0 \;\Rightarrow\; 0'6x = 60 \;\;;;\;\; \underline{x = 100\ metros}$$

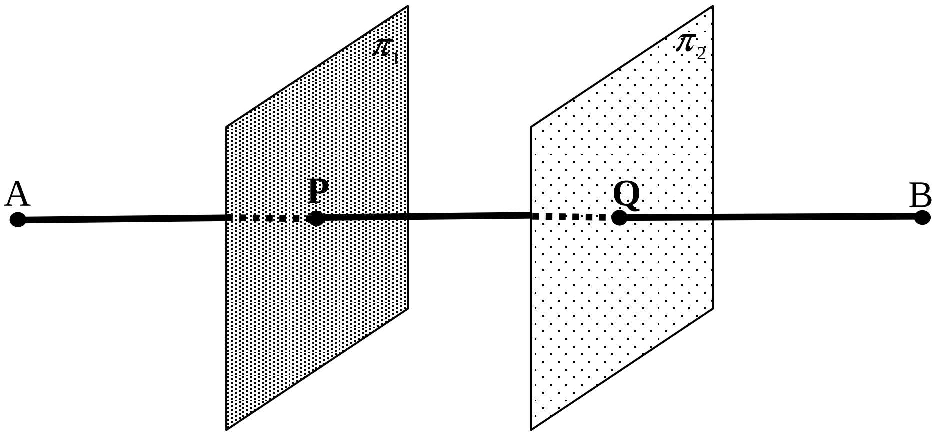
Para el valor de x obtenido, el valor de las áreas pedidas es:

$$C_1 \;\Rightarrow\; S_1 = 1000 \cdot 100 - \frac{5}{2} \cdot 100^2 = 100 \cdot (1000 - 250) = \underline{75.000\ m^2 = S_1}$$

$$C_2 \;\Rightarrow\; S_2 = 96.000 - 600 \cdot 100 = 96.000 - 60.000 = \underline{36.000\ m^2 = S_2}$$

****

6º) Un segmento de extremos A(5, 3, 1) y B(4, 2, -1) se divide en tres partes iguales mediante dos planos perpendiculares al segmento. Calcular las ecuaciones de los planos y la distancia entre ellos.



Un vector normal a los dos planos pedidos es $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} = B - A = (4,\ 2,\ -1) - (5,\ 3,\ 1) = (-1,\ -1,\ -2)$$

Los planos pedidos, π_1 y π_2, tienen como ecuaciones $\pi_1 \equiv -x - y - 2z + C_1 = 0$ y $\pi_2 \equiv -x - y - 2z + C_2 = 0$.

De la observación de la figura se deducen la igualdades $\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AP} = 3 \cdot \overrightarrow{QB}$.

$$\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{AP} \;\Rightarrow\; (-1,\ -1,\ -2) = 3 \cdot (x-5,\ y-3,\ z-1) = (3x-15,\ 3y-9,\ 3z-3) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 15 = -1 \ ;;\ 3x = 14 \to x = \frac{14}{3} \\ 3y - 9 = -1 \ ;;\ 3y = 8 \to y = \frac{8}{3} \\ 3z - 3 = -2 \ ;;\ 3z = 1 \to z = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P\left(\frac{14}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{1}{3}\right)}}$$

$$\overrightarrow{AB} = 3 \cdot \overrightarrow{QB} \;\Rightarrow\; (-1,\ -1,\ -2) = 3 \cdot (4-x,\ 2-y,\ -1-z) = (12-3x,\ 6-3y,\ -3-3z) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 12 - 3x = -1 \ ;;\ 3x = 13 \to x = \frac{13}{3} \\ 6 - 3y = -1 \ ;;\ 3y = 7 \to y = \frac{7}{3} \\ -3 - 3z = -2 \ ;;\ 3z = -1 \to z = -\frac{1}{3} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Q\left(\frac{13}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{1}{3}\right)}}$$

El plano π_1, por contener al punto P, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv -x - y - 2z + C_1 = 0 \\ P\left(\frac{14}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \cdot \frac{14}{3} - 1 \cdot \frac{8}{3} - 2 \cdot \frac{1}{3} + C_1 = 0\ \ ;;\ \ 14 + 8 + 2 - 3C_1 = 0\ \ ;;$$

$$3C_1 = 24\ \ ;;\ \ \underline{C_1 = 8}\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi_1 \equiv x + y + 2z - 8 = 0}}$$

El plano π_2, por contener al punto Q, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 \equiv -x - y - 2z + C_2 = 0 \\ Q\left(\frac{13}{3},\ \frac{7}{3},\ -\frac{1}{3}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 \cdot \frac{13}{3} - 1 \cdot \frac{7}{3} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + C_2 = 0\ \ ;;\ \ 13 + 7 - 2 - 3C_2 = 0\ \ ;;$$

$$3C_2 = 18\ \ ;;\ \ \underline{C_2 = 6}\quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + y + 2z - 6 = 0}}$$

La distancia entre los planos, $d(\pi_1,\ \pi_2)$, es la tercera parte del módulo del vector $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB}$:

$$d(\pi_1,\ \pi_2) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{1+1+4} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}\ u = d(\pi_1,\ \pi_2)}}$$

****