

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****JUNIO - 2003**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos****OPCIÓN A**

1º) Calcular las ecuaciones de las dos rectas del plano que pasan por el punto $P(1, -1)$ y que son tangentes a la curva de ecuación $y = (x-1)^2$.

Todas las rectas que pasan por el punto $P(1, -1)$ tienen por ecuación:

$$y+1 = m(x-1) = mx - m \quad ; \quad y = mx - (m+1) \quad (*)$$

Los puntos de corte de ambas funciones se obtiene resolviendo el sistema que forman:

$$\left. \begin{array}{l} y = (x-1)^2 \\ y = mx - (m+1) \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = mx - m - 1 \quad ; \quad x^2 - (m+2)x + (m+2) = 0$$

$$x = \frac{m+2 \pm \sqrt{(m+2)^2 - 4(m+2)}}{2} = \frac{m+2 \pm \sqrt{m^2 + 4m + 4 - 4m - 8}}{2} = \frac{m+2 \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

Como quiera que si la recta es tangente a la curva la solución tiene que ser única, lo cual implica que el discriminante de la ecuación anterior tiene que ser cero, o sea:

$$m^2 - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \\ m_2 = -2 \end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en (*) se obtienen las dos tangentes pedidas, que son:

$$y = mx - (m+1) \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2 \rightarrow y = 2x - (2+1) = 2x - 3 \Rightarrow \underline{\underline{t_1 \equiv 2x - y - 3 = 0}} \\ m_2 = -2 \rightarrow y = -2x - (-2+1) = -2x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 \equiv 2x + y - 1 = 0}} \end{cases}$$

2º) Calcular: $I = \int_1^e \frac{2Lx}{x} \cdot dx.$

$$I = \int_1^e \frac{2Lx}{x} \cdot dx = 2 \cdot \int_1^e \frac{Lx}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \frac{Lx = t}{\frac{1}{x} \cdot dx = dt} \left\| \begin{array}{l} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \right. \right\} \Rightarrow 2 \cdot \int_0^1 t \cdot dt = 2 \cdot \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 =$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{1u^2 = I}}$$

3º) Considerar el punto $P(5, -2, 9)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{6}$.

a) Calcular la ecuación de la recta s que corta perpendicularmente a r y que pasa por P .

b) Calcular el punto de corte T entre las rectas r y s .

a)

En primer lugar determinamos un plano π que sea perpendicular a r y que contenga a P :

Un vector director de r y normal a π es: $\vec{v} = (-2, -3, 6)$.

El plano π tiene por ecuación: $\pi \equiv -2x - 3y + 6z + D = 0$.

Para determinar el valor de D tendremos en cuenta que contiene al punto P :

$$\left. \begin{array}{l} -2x - 3y + 6z + D = 0 \\ P(5, -2, 9) \end{array} \right\} \Rightarrow -2 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 6 \cdot 9 + D = 0 ; ; -10 + 6 + 54 + D = 0 ; ; \underline{D = -50}$$

El plano es $\pi \equiv 2x + 3y - 6z + 50 = 0$

Para determinar el punto T de intersección de π con r expresamos la recta r en forma de ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 2k \\ y = -1 - 3k \\ z = 6k \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi \\ r \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(1 - 2k) + 3(-1 - 3k) - 6 \cdot 6k + 50 = 0 \\ 2 - 4k - 3 - 9k - 36k + 50 = 0 ; ; 49 = 49k \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{k = 1}$$

El punto T tiene por coordenadas: $T(-1, -4, 6)$.

La recta pedida es la que pasa por los puntos P y T :

$$\vec{u} = \overrightarrow{TP} = P - T = (5, -2, 9) - (-1, -4, 6) = (6, 2, 3).$$

La recta pedida s , tiene como vector director a $\vec{u}$ y pasa por $P(5, -2, 9)$:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-9}{3}}}$$

b)

El punto de corte de r y s es $T(-1, -4, 6)$.

4º) ¿Para cuál o cuáles de los valores del parámetro real λ , el siguiente sistema de ecuaciones es compatible indeterminado?

$$\begin{cases} x + 2y + (\lambda + 2)z = 0 \\ x + (2\lambda)y + 3z = 9 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda + 2 \\ 1 & 2\lambda & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ;; \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda + 2 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 3 & 9 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \lambda + 2 \\ 1 & 2\lambda & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2\lambda + 12 - 4\lambda(\lambda + 2) + 2 = -2\lambda - 4\lambda^2 - 8\lambda + 14 = 0 \quad ;;$$

$$2\lambda^2 + 5\lambda - 7 = 0 \quad ;; \quad \lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 56}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-5 \pm 9}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq -\frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\text{Compatible determinado}}$$

Para $\lambda = -\frac{7}{2}$ el rango de M' es:

$$\left. \begin{aligned} M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -28 + 36 - 8 = 0 \\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 1 & 3 & 9 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 27 + 9 + 6 = 0 \\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} &\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -7 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24 + 18 - 42 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Rango } M' = 2$$

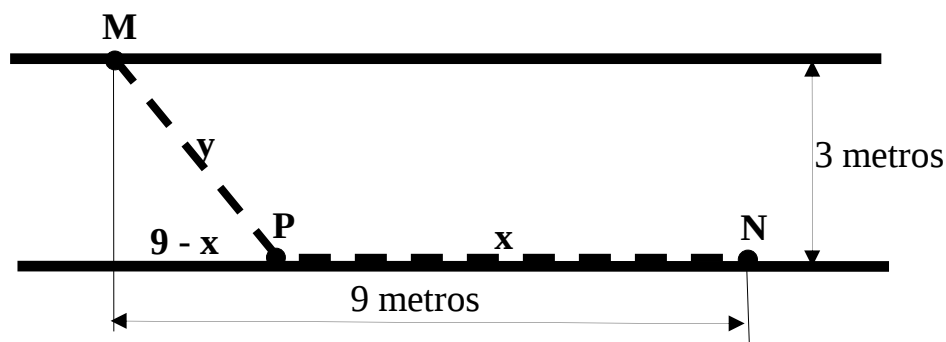
Para $\lambda = -\frac{7}{2} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n \Rightarrow \text{Compatible indeterminado}$

Para $\lambda = 1$ el rango de M' es :

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 36 - 8 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango} = 3$$

Para $\lambda = 1 \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \underline{\text{Incompatible}}$

5º) Queremos unir el punto M situado en un costado de una calle de 3 metros de ancho, con el punto N situado al otro costado y 9 metros más abajo, utilizando dos cables rectos, uno desde M hasta el punto P situado al otro lado de la calle y otro desde P hasta N siguiendo el lateral de la calle, según el esquema siguiente:



El coste de la instalación del cable MP es de 12 euros por metro y del cable PN de 6 euros por metro. ¿Cómo debemos escoger el punto P de manera que la conexión de M con N sea tan económico como sea posible? ¿Cuál será el coste mínimo?

$$\text{Coste} = C = 12y + 6x \quad (*)$$

$$y^2 = 3^2 + (9 - x)^2 = 9 + 81 - 18x + x^2 = x^2 - 18x + 90 \quad ;; \quad y = \sqrt{x^2 - 18x + 90}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de y, resulta:

$$C' = 12 \cdot \frac{2x - 18}{2 \cdot \sqrt{x^2 - 18x + 90}} + 6 = 6 \cdot \frac{2x - 18}{\sqrt{x^2 - 18x + 90}} + 6 = 6 \left(\frac{2x - 18}{\sqrt{x^2 - 18x + 90}} + 1 \right)$$

$$C' = 0 \Rightarrow \frac{2x - 18}{\sqrt{x^2 - 18x + 90}} + 1 = 0 \quad ;; \quad 2(9 - x) = \sqrt{x^2 - 18x + 90} \quad ;;$$

$$4(81 - 18x + x^2) = x^2 - 18x + 90 \quad ;; \quad 324 - 72x + 4x^2 = x^2 - 18x + 90 \quad ;; \quad 3x^2 - 54x + 234 = 0 \quad ;;$$

$$x^2 - 18x + 78 = 0 \quad ;; \quad x = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 312}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{18 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 9 \pm \sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 9 + \sqrt{3} \\ x_2 = 9 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Como tiene que ser $x < 9$, la solución es $x = (9 - \sqrt{3}) \cong \underline{\underline{7'27 \text{ metros} = x}}$.

$$y = \sqrt{(9 + \sqrt{3})^2 - 18(9 + \sqrt{3}) + 90} = \sqrt{81 + 18\sqrt{3} + 3 - 162 - 18\sqrt{3} + 90} = \sqrt{12} \cong \underline{\underline{3'46 \text{ metros} = y}}$$

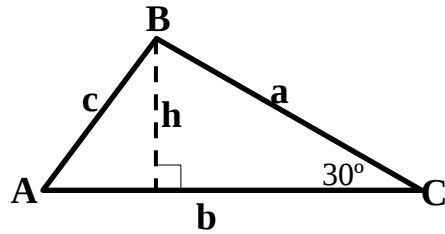
$$\text{El coste es : } C = 12 \cdot 3'46 + 6 \cdot 7'27 = \underline{\underline{94'41 \text{ euros} = \text{Coste}}}$$

6º) De un triángulo sabemos que la suma de las longitudes de dos lados a y b es de 11m, que el ángulo C opuesto al tercer lado vale 30° y que el área del triángulo es de 7 metros cuadrados. Calcular:

a) La longitud de cada uno de los lados del triángulo.

b) Los ángulos del triángulo.

a)



$$a + b = 11 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{b \cdot h}{2} = 14 \Rightarrow b \cdot h = 14 \\ \text{sen } 30^\circ &= \frac{h}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow h = \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} b \cdot \frac{a}{2} &= 14 \\ a \cdot b &= 28 \end{aligned} \right. \quad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} a + b &= 11 \Rightarrow b = 11 - a \\ a \cdot b &= 28 \Rightarrow b = \frac{28}{a} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 11 - a = \frac{28}{a} \quad ; \quad 11a - a^2 = 28 \quad ; \quad a^2 - 11a + 28 = 0$$

$$a = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 112}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ a_2 = 4 \end{cases} \quad (a \text{ y } b \text{ son alternativos})$$

Tomamos, por ejemplo, $a = 7$ metros ; $b = 4$ metros.

Aplicando el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 30^\circ = 49 + 16 - 2 \cdot 7 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 65 - 28\sqrt{3} = 16'50$$

$$c = \sqrt{16'50} = \underline{\underline{4'06 \text{ metros} = c}}$$

b)

Aplicando de nuevo el teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c} = \frac{16 + 16'50 - 49}{2 \cdot 4 \cdot 4'06} = -\frac{16'50}{32'50} =$$

$$= -0'5077 \Rightarrow \underline{\underline{A = 120^\circ 30' 42''}}$$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - 150^\circ 30' 42'' = \underline{\underline{29^\circ 29' 18'' = B}}$$

OPCIÓN B

1º) Determinar cuál es el punto $y = \sqrt{x}$, (es decir, de la forma $(x, \sqrt{x})$), que es el más próximo del punto $P(4, 0)$.

La distancia entre dos puntos viene dado por la fórmula:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Supongamos que el punto pedido es $Q(x, \sqrt{x})$.

$$d = \overline{PQ} = \sqrt{(x-4)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + x} = \sqrt{x^2 - 7x + 16}$$

La distancia será mínima cuando su derivada sea cero:

$$d' = \frac{2x-7}{2\sqrt{x^2-7x+16}} = 0 \Rightarrow 2x-7=0 \quad ;; \quad x = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$$

$$y = \sqrt{x} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(\frac{7}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}\right)}}$$

2º) Determinar la ecuación del plano que contiene a la recta $r \equiv x-1 = \frac{y}{2} = z+1$ y pasa por el origen de coordenadas.

Este problema se puede resolver de diversas formas; por ejemplo, lo haremos como se explica a continuación:

Determinamos dos puntos de la recta r , para lo cual la expresamos mediante unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x=1+k \\ y=2k \\ z=-1+k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=0 \rightarrow A(1, 0, -1) \\ k=1 \rightarrow B(2, 2, 0) \end{cases}$$

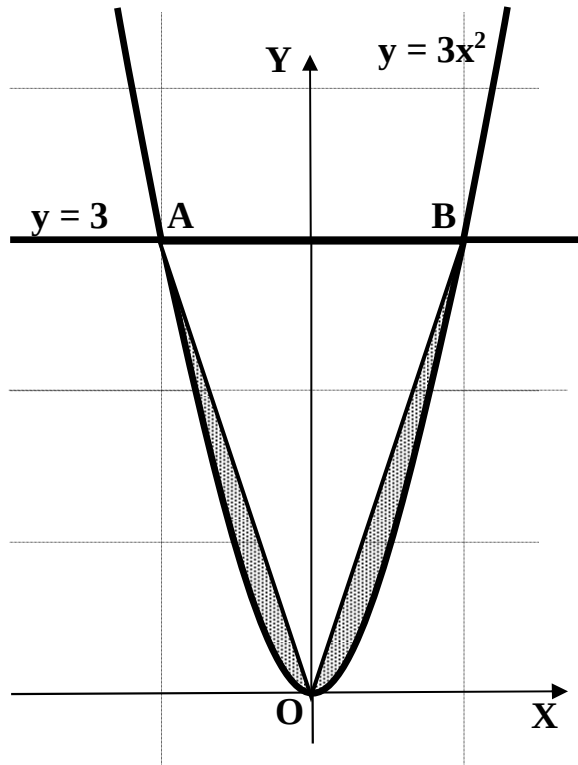
$$\text{Los puntos A y B con O determinan los vectores} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1, 0, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (2, 2, 0) \end{cases}$$

El plano π pedido tiene como vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y contiene a O:

$$\pi(O; \vec{u}, \vec{v}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad -2y + 2z + 2x = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x - y + z = 0}}$$

3°) Considerar la región S del plano limitada por la parábola $y = 3x^2$ y la recta $y = 3$ representada en el esquema siguiente:



Siendo A y B los puntos de intersección de la recta y la parábola, y T el triángulo que tiene por vértices A, B y el origen de coordenadas. Calcular el área de la región que resulta cuando le quitamos el triángulo T a la región S.

Los puntos A y B de corte de la recta $y = 3$ con la parábola $y = 3x^2$ se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones formado por ambas:

$$\left. \begin{array}{l} y = 3x^2 \\ y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x^2 = 3 \;; \; x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow \underline{A(1, 3)} \\ x_2 = -1 \rightarrow \underline{B(-1, 3)} \end{cases}$$

La recta que pasa por los puntos O y A tiene por ecuación $y = 3x$. Por simetría con respecto al eje Y, determinamos el área de abscisas positivas.

Por otra parte, en la zona considerada, todas las ordenadas de la recta $y = 3x$ son mayores que las correspondientes ordenadas de la función $y = 3x^2$, por lo tanto se puede proceder del modo siguiente:

$$A = 2 \cdot \int_0^1 (3x - 3x^2) \cdot dx = 6 \cdot \int_0^1 (x - x^2) \cdot dx = 6 \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = 6 \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{1 \, u^2 = A}}$$

4º) Consideramos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a + 1 \\ 2x - y + az = a + 2 \\ x - y + z = 4 \end{array} \right\}$$

donde a es un parámetro. Si $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$ es una solución, ¿cuál es el valor del parámetro a?

Resolviendo cualquier incógnita por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ a+2 & -1 & a \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-(a+1) - (a+2) + 4a + 4 + a(a+1) - (a+2)}{-a - 2 + a + 1 + a^2 - 2} =$$

$$= \frac{-a - 1 - 2a - 4 + 4a + 4 + a^2 + a}{a^2 - 3} = \frac{a^2 + 2a - 1}{a^2 - 3} = 1 \quad ;; \quad a^2 + 2a - 1 = a^2 - 3 \quad ;; \quad \underline{\underline{a = -1}}$$

Vamos a comprobar el problema:

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = a + 1 \\ 2x - y + az = a + 2 \\ x - y + z = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + y + z = -1 + 1 \\ 2x - y - z = -1 + 2 \\ x - y + z = 4 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} -x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \\ x - y + z = 4 \end{array} \right\}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 1 + 1 + 1 - 2 = -2 = |M|$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1 - 4 + 4 - 1}{-2} = \frac{-2}{-2} = \underline{\underline{1 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1 + 8 - 1 - 4}{-2} = \frac{2}{-2} = \underline{\underline{-1 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4+1-1-8}{-2} = \frac{-4}{-2} = \underline{2} = z$$

5º) a) Determinar el valor del parámetro a que hace que la función $f(x) = \frac{x+a}{x^3}$ presente un extremo relativo para $x = 3$.

b) Para este valor del parámetro a , calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de la función.

c) A partir de los datos obtenidos, hacer una gráfica aproximada de $f(x)$.

a)

$$f'(x) = \frac{x^3 - (x+a) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x - 3 \cdot (x+a)}{x^4} = \frac{x - 3x - 3a}{x^4} = \frac{-2x - 3a}{x^4} = f'(x)$$

$$f'(3) = 0 \Rightarrow \frac{-2 \cdot 3 - 3a}{3^4} = 0 \quad ; \quad -6 - 3a = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{a = -2}}$$

b)

$$f(x) = \frac{x-2}{x^3} \quad ; \quad f'(x) = \frac{-2x - 3 \cdot (-2)}{x^4} = \frac{6 - 2x}{x^4} = f'(x)$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ solamente consideramos el numerador, puesto que el numerador es distinto de 0, $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{6 - 2x}{x^4} = 0 \quad ; \quad 6 - 2x = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{x = 3}}$$

$$x > 3 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente: (3, \infty)}}$$

$$x < 3 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente: (-\infty, 0) \cup (0, 3)}}$$

Asíntotas horizontales:

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^3} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}} \quad (\text{Eje } X)$$

Asíntotas verticales:

Por tratarse de una función racional, las asíntotas verticales son los valores que anulan el denominador, o sea: $x = 0$ (El eje Y).

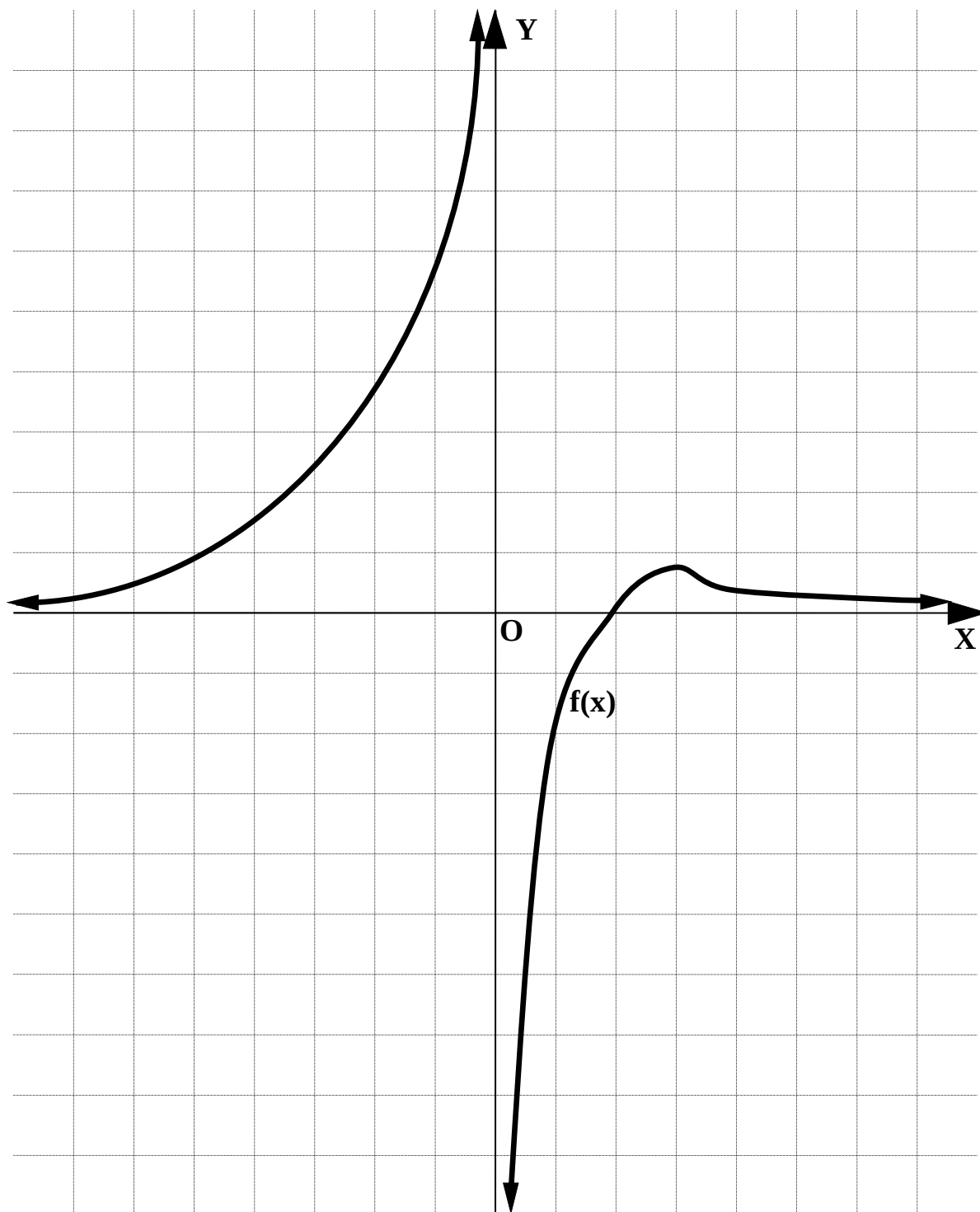
Las tendencias de la asíntota vertical son:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x^3} = -\infty \quad (\downarrow)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x^3} = +\infty \quad (\uparrow)$$

c)

Con los datos obtenidos en los puntos anteriores puede hacerse fácilmente una representación aproximada de la función, que es la que sigue:



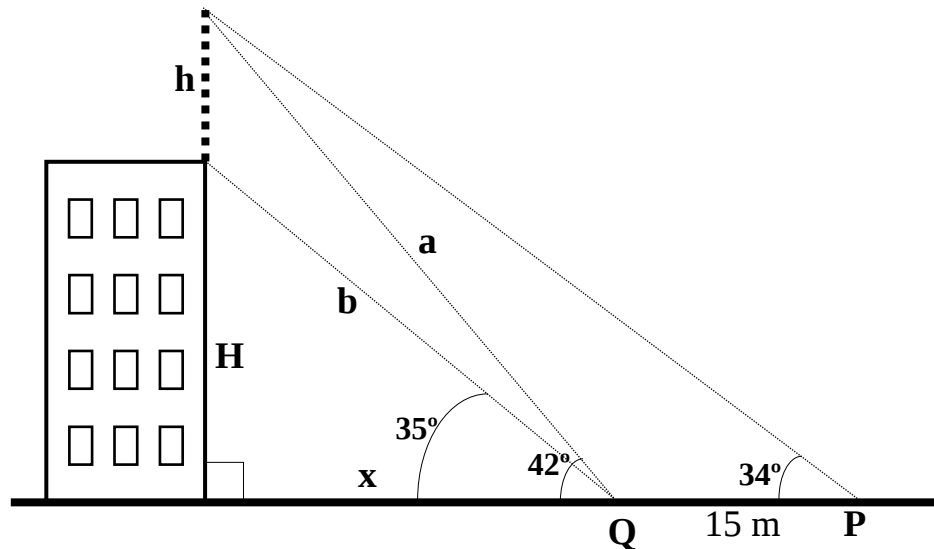
6º) En el tejado de un edificio hay instalada una antena de telefonía móvil. Desde un punto P de la calle, el ángulo entre la horizontal y la línea que va de P hasta el extremo superior de la antena es de 34° . Nos acercamos a un punto Q que está 15 metros más próximo del edificio y ahora el ángulo entre la horizontal y la línea que apunta hacia el extremo superior de la antena es de 42° , mientras que el ángulo entre la horizontal y la línea que apunta hacia el extremo inferior de la citada antena es de 35° .

a) Hacer un esquema de la situación señalando claramente cuáles son los ángulos que da el enunciado.

b) Calcular las distancias de Q a los dos extremos de la antena.

c) Calcular la altura de la antena y la altura del edificio.

a)



b)

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tag} 34^\circ &= \frac{H+h}{x+15} \rightarrow H+h = (x+15) \cdot \operatorname{tag} 34^\circ \\ \operatorname{tag} 42^\circ &= \frac{H+h}{x} \rightarrow H+h = x \cdot \operatorname{tag} 42^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x+15) \cdot \operatorname{tag} 34^\circ = x \cdot \operatorname{tag} 42^\circ ; ;$$

$$x \cdot \operatorname{tag} 34^\circ + 15 \cdot \operatorname{tag} 34^\circ = x \cdot \operatorname{tag} 42^\circ ; ; 15 \cdot \operatorname{tag} 34^\circ = x(\operatorname{tag} 42^\circ - \operatorname{tag} 34^\circ) ; ;$$

$$x = \frac{+15 \cdot \operatorname{tag} 34^\circ}{\operatorname{tag} 42^\circ - \operatorname{tag} 34^\circ} = \frac{15 \cdot 0'6745}{0'9004 - 0'6745} = \frac{10'1176}{0'2259} = \underline{\underline{44'79 \text{ m} = x}}$$

c)

$$\cos 35^\circ = \frac{x}{b} \Rightarrow b = \frac{x}{\cos 35^\circ} = \frac{44'79}{0'8192} = \underline{\underline{54'68 \text{ metros} = b}}$$

$$\cos 42^\circ = \frac{x}{a} \Rightarrow a = \frac{x}{\cos 42^\circ} = \frac{44'79}{0'7431} = \underline{\underline{60'27 \text{ metros} = a}}$$

$$\text{tag } 35^\circ = \frac{H}{x} \Rightarrow H = x \cdot \text{tag } 35^\circ = 44'79 \cdot 0'7002 = \underline{\underline{31'36 \text{ metros} = H}}$$

$$\text{tag } 42^\circ = \frac{H+h}{x} \Rightarrow H+h = x \cdot \text{tag } 42^\circ = 44'79 \cdot 0'9004 = 40'33 = H+h$$

$$h = 40'33 - H = 40'33 - 31'36 = \underline{\underline{8'97 \text{ metros} = h}}$$
