PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE - 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1ª) Calcular el valor de la siguiente integral: $I = \int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} \cdot dx$.

$$I = \int_0^3 \frac{x+1+\sqrt{x+1}}{x+1} \cdot dx = \int_0^3 \frac{x+1}{x+1} \cdot dx + \int_0^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x+1} \cdot dx = \int_0^3 dx + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot dx = [x]_0^3 + I_1 \quad (*)$$

$$I_1 = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \middle\| \begin{array}{l} x = 3 \rightarrow t = 4 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow I_1 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \int_1^4 t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_1^4 =$$

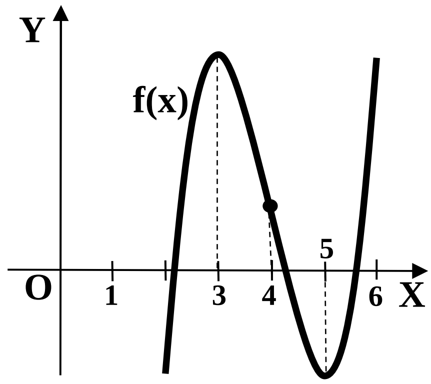
$$= \left[2\sqrt{t}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = \underline{2\ u^2 = I_1}$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de I_1 queda:

$$I = [x]_0^3 + 2 = 3 - 0 + 2 = \underline{\underline{5\ u^2 = I}}$$

****

2ª) La gráfica siguiente corresponde a una función $f:[2,\ 6]\to R$, derivable y con derivada continua. Hacer un esbozo de la gráfica $f':(2,\ 6)\to R$ y justificar el porqué.



De la observación de la gráfica de f(x) podemos deducir lo siguiente:

1.- La función es creciente para $(2,\ 3)\cup(5,\ 6)$ y decreciente en $(3,\ 5)$ por lo tanto los valores de la derivada son los siguientes:

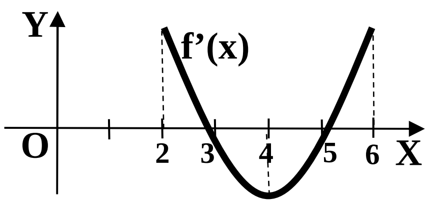
$$f'(x)\ \Rightarrow\ \begin{cases} <0\ \ para\ \ (3,\ 3)\cup(5,\ 6) \\ >0\ \ para\ \ (3,\ 5) \end{cases}$$

2.- Para x = 3 la función presenta un máximo relativo y para x = 5 la función tiene un mínimo relativo, por lo cual las derivadas primera y segunda son:

$$\left\{\begin{matrix} f'(3)=0\ \ ;;\ \ f''(3)<0 \\ f'(5)=0\ \ ;;\ \ f''(5)>0 \end{matrix}\right\}$$

3.- Para x = 3 la derivada de f'(x), o sea f''(x) es negativa, lo cual significa que en $x=3$ la función derivada es decreciente y en x = 5 es creciente.

4.- Para valores de x menores que 4, la función es cóncava $(\cap)$, lo cual significa que la segunda derivada es menor que cero y para valores de x mayores que 4 la función es convexa $(\cap)$, lo cual indica que la segunda derivada es mayor que cero: es decir, que la función derivada f'(x) es decreciente para x < 4 y creciente para x > 4, lo que indica que tiene un mínimo relativo para x = 4.



Con los datos anteriores se puede representar con suficiente precisión la gráfica de f'(x), que es la que se la que se expresa.

****

www.yoquieroaprobar.es

3ª) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Encontrar una matriz X que cumpla A · X = B.

b) Calcular B^{100}. Razonar la respuesta.

----

a)

Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matriz pedida.

$$A\cdot X=B \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 3a-2c & 3b-2d \\ -2a+c & -2b+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} 3a-2c=1 \\ -2a+c=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3a-2c=1 \\ -4a+2c=2 \end{array}\right\} \Rightarrow -a=3 \;;;\; \underline{a=-3} \;;;\; -2a+c=1 \;;;\; 6+c=1 \;;;\; \underline{c=-5} \\ \\ \left.\begin{array}{r} 3b-2d=1 \\ -2b+d=1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3b-2d=1 \\ -4b+2d=2 \end{array}\right\} \Rightarrow -b=3 \;;;\; \underline{b=-3} \;;;\; -2b+d=1 \;;;\; 6+d=1 \;;;\; \underline{d=-5} \end{array}\right.$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}}}$$

De otra forma:

$$A\cdot X=B \;;;\; A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \;;;\; I\cdot X=A^{-1}\cdot B \;;;\; \underline{X=A^{-1}\cdot B} \qquad (*)$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3-4=\underline{-1} \;;;\; A^T=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; Adj.A^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \;;;\; \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

$$X=A^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1-2 & -1-2 \\ -2-3 & -2-3 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}=X}}$$

b)

$$B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\underline{2B=B^2}$$

$$B^3=B^2\cdot B=2B\cdot B=2\cdot B^2=2\cdot 2B=4B=\underline{2^2\cdot B=B^3}$$

$$B^4=B^3\cdot B=2^2B\cdot B=2^2\cdot B^2=2^2\cdot 2B=\underline{2^3\cdot B=B^4}$$

. . . .

www.yoquieroaprobar.es

$En\ \ general:\ \underline{B^n = 2^{n-1} \cdot B}$

$$\underline{\underline{B^{100} = 2^{99} \cdot B}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Dados los vectores $\overrightarrow{u}=(1,\ 2)\ y\ \overrightarrow{v}=(-3,\ 1)$:

a) Comprobar que $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$ forman una base del espacio vectorial de los vectores del plano.

b) Encontrar las componentes del vector $\overrightarrow{w}=(-1,\ 5)$ en la base $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\}$.

----

a)

Para que dos vectores formen una base es necesario que no sean nulas todas sus componentes y que sean linealmente independientes.

El evidente que los vectores $\overrightarrow{u}\ y\ \overrightarrow{v}$ no son nulos y tampoco son coplanarios, o sea, que son linealmente independientes: $\frac{1}{3}\neq\frac{2}{1}$, por lo tanto, forman una base en V_2.

b)

$$\overrightarrow{w}=\alpha\cdot\overrightarrow{u}+\beta\cdot\overrightarrow{v}\ \Rightarrow\ (-1,\ 5)=\alpha\cdot(1,\ 2)+\beta\cdot(-3,\ 1)\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha-3\beta=-1\\2\alpha+\beta=5\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}\alpha-3\beta=-1\\6\alpha+3\beta=15\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 7\alpha=14\ ;;\ \underline{\alpha=2}\ ;;\ 2\alpha+\beta=5\ ;;\ 4+\beta=5\ ;;\ \underline{\beta=1}$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w}=2\,\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

<u>PROBLEMAS</u>

1º) Se considera la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,\ (a\neq 0)$.

a) Encontrar los valores a, b, c y d para los cuales f(x) corta al eje OX en los puntos de abscisa x = 0 y x = 1 y presenta un mínimo relativo en el punto x = 0.

b) Hacer un esbozo de la gráfica de la función que se ha obtenido, y terminar de calcular los elementos necesarios para dibujarla.

----

a)

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ \ ;;\ \ f(0)=0\ \Rightarrow\ \underline{d=0}\ \ ;;\ \ f(1)=0\ \Rightarrow\ \underline{a+b+c=0}\qquad (1)$$

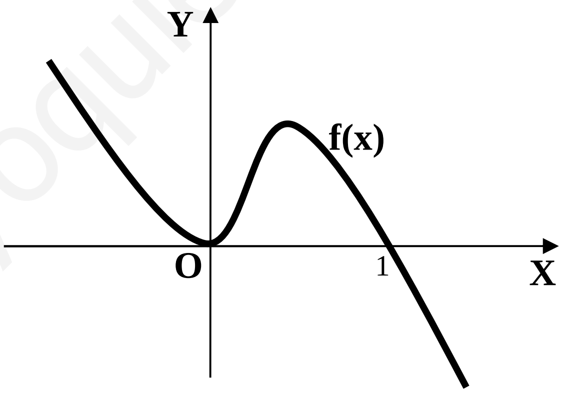
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\ \ ;;\ \ f'(0)=0\ \Rightarrow\ \underline{c=0}$$

Sustituyendo en (1) resulta: $a+b=0\ \ ;;\ \ \underline{b=-a}$

$$La\quad función\ \ es\ \ \underline{\underline{f(x)=ax^{3}{}'-ax^2}}$$

b)

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Del esbozo de la gráfica se deduce que entre los valores 0 y 1 la función tiene un mínimo relativo.

Por existir un mínimo relativo para x = 0, la segunda derivada para x = 0 tiene que ser positiva:

$$f''(x)=6ax-2a\ \ ;;\ \ f''(0)>0\ \Rightarrow\ -2a>0\ \ ;;\ \ \underline{a<0}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow 6ax-2a=0\ \ ;;\ \ 2a(3x-1)=0\ \ ;;\ \ x=\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{Punto\ \ Inflexión\ \ para\ \ x=\frac{1}{3}}$$

www.yoquieroaprobar.es

Con los datos anteriores pueden obtenerse infinitas funciones. Una, por ejemplo, puede ser:

$$f''(x) = 2a(3x-1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2a\int (3x-1)\, dx = 2a\left(\frac{3x^2}{2} - x\right) = \underline{3ax^2 - 2ax = f'(x)}$$

$$f(x) = \int \left(3ax^2 - 2ax\right) \cdot dx = 3a \cdot \frac{x^3}{3} - 2a\frac{x^2}{2} = \underline{ax^3 - ax^2 = f(x)}$$

Como tiene que ser a < 0, por ejemplo, haciendo a = -1:

$$\underline{\underline{f(x) = -x^3 + x^2}}$$

****

www.yoquieroaprobar.es

2º) Se consideran las rectas $r \equiv \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1-4t \\ z = 5+t \end{cases}$:

a) Estudiar su posición relativa.

b) Hallar la ecuación del plano π que contiene a s y es paralelo a r.

c) Calcular la distancia entre r y s.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son:

$$r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} A(2,\ -1,\ 0) \\ \overrightarrow{u} = (-2,\ 1,\ -2) \end{array} \right\} \;;\; s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} B(1,\ -1,\ 5) \\ \overrightarrow{v} = (3,\ -4,\ 1) \end{array} \right\}$$

Es evidente que los vectores son linealmente independientes, por lo tanto, las rectas o se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso determinamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen el punto A de r y como extremo el punto B de s:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1,\ -1,\ 5) - (-2,\ 1,\ -2) = (3,\ -2,\ 7)$$

Si los vectores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{w}$ están en un mismo plano, las rectas se cortan y, en caso contrario, se cruzan.

El rango del conjunto de los vectores $\{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\}$ es el siguiente:

$$Rango\ \ de\ \ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 56+12+3-24-4-21 = 71-49 = -22 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\underline{Rango\ \ de\ \ \{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{w}\} = 3} \Rightarrow \underline{\underline{Las\ \ rectas\ \ se\ \ cruzan}}$$

b)

El plano pedido π tiene como vectores a los vectores de las rectas y, por contener a s, contiene a todos sus puntos, por lo tanto, el plano es:

$$\pi(B;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-5 \\ -2 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;\;$$

$$(x-1) - 6(y+1) + 8(z-5) - 3(z-5) - 8(x-1) + 2(y+1) = 0 \;;\;$$

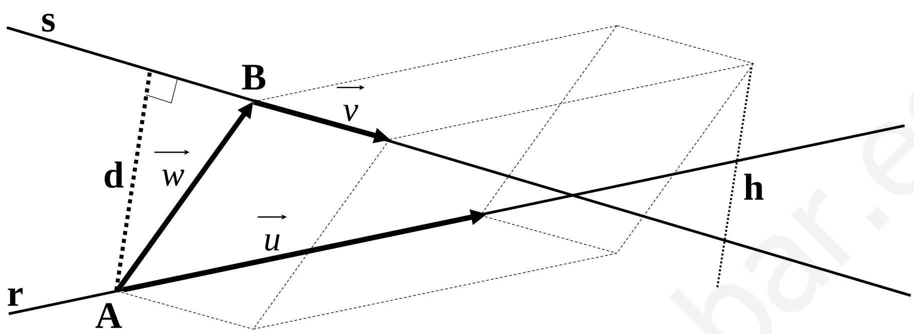
$$-7(x-1)-4(y+1)+5(z-5)=0 \;;;\; -7x+7-4y-4+5z-25=0 \;;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 7x+4y-5z+22=0}}$$

c)

Se entiende como distancia entre dos rectas que se cruzan, a la menor distancia entre ambas.

Para una mejor comprensión, hacemos un esquema de la situación.



Para calcular la distancia entre las rectas vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas y otro vector que tiene como origen un punto A de la recta r y como final otro punto C de la recta s, tal como se observa en la figura.

El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observemos que la altura h es igual a la distancia pedida d entre ambas rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V=\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)=\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|\cdot h=\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|\cdot d \quad\Rightarrow\quad d=\frac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|}$$

$$d(r,\ s)=\frac{\left|\overrightarrow{u}\cdot\left(\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}-2 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 1\\ 3 & -2 & 7\end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ -2 & 1 & -2\\ 3 & -4 & 1\end{matrix}\right\|}=\frac{|-22|}{|i-6j+8k-3k-8i+2j|}=$$

$$=\frac{22}{|-7i-4j+5k|}=\frac{22}{\sqrt{(-7)^2+(-4)^2+5^2}}=\frac{22}{\sqrt{90}}=\frac{22}{3\sqrt{10}}=\frac{22\sqrt{10}}{30}=\underline{\underline{\frac{11\sqrt{30}}{15}\ u=d(r,\ s)}}$$

****