PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1ª) Considerar el siguiente sistema en función del parámetro real a: $\begin{cases} x - ay = 1 \\ ax + y = 3 \end{cases}$.

a) Discutirlo en función del parámetro a.

b) Resolver los casos compatibles.

----

a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{pmatrix} \;;;\; |M| = 1 + a^2 \;;;\; \underline{|M| \neq 0,\ \forall a \in R} \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ \ M = 2}$$

$$\underline{\underline{Rango\ \ M = Rango\ \ M' = 2 = n^o\ \ incóg. \Rightarrow Compatible\ \ \det er\min ado,\ \ \forall a \in R}}$$

b)

Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{a^2 + 1} = \underline{\underline{\frac{1 + 3a}{a^2 + 1}}} = x \;;;\; y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{vmatrix}}{a^2 + 1} = \underline{\underline{\frac{3 - a}{a^2 + 1}}} = y$$

****

2ª) La siguiente matriz expresa los precios unitarios, en euros, de cuatro artículos A, B, C y D, procedentes de las fábricas $f_1,\ f_2\ y\ f_3$:

$$P=\begin{pmatrix}34 & 40 & 36\\ 11 & 8 & 12\\ 23 & 27 & 32\\ 25 & 21 & 30\end{pmatrix}$$

Si el pedido es representado por un vector fila C(x, y, z, t), ¿qué representa cada uno de los elementos del resultado del producto C · P? Si queremos comprar 25 unidades de A, 30 de B, 60 de C y 75 de D, ¿cuál de las fábricas nos ofrece mejor precio?

El producto de C · P representa el valor de un pedido de determinadas cantidades de cada uno de los cuatro productos A, B, C y D a cada una de las tres fábricas.

$$C\cdot P=(x,\ y,\ z,\ t)\cdot\begin{pmatrix}34 & 40 & 36\\ 11 & 8 & 12\\ 23 & 27 & 32\\ 25 & 21 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34x+11y+23z+25t\\ 40x+\ 8y+27z+21t\\ 36x+12y+32z+30t\end{pmatrix}$$

Aplicando el producto al caso concreto indicado, sería:

$$C\cdot P=(25,\ 30,\ 60,\ 75)\cdot\begin{pmatrix}34 & 40 & 36\\ 11 & 8 & 12\\ 23 & 27 & 32\\ 25 & 21 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}34\cdot 25+11\cdot 30+23\cdot 60+25\cdot 75\\ 40\cdot 25+8\cdot 30+27\cdot 60+21\cdot 75\\ 36\cdot 25+12\cdot 30+32\cdot 60+30\cdot 75\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}850+330+1380+1875\\ 1000+240+1620+1575\\ 900+360+1920+2250\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4435\\ 4435\\ 5430\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}$$

Como puede observarse, las fábricas f_1 y f_2 son las que interesan por igual.

****

3ª) Hallar la distancia entre la recta $r \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ y el plano π cuya ecuación general es $\pi \equiv 3x + 4y + 7 = 0$.

Aunque no sea necesario, vamos a comprobar que la recta es paralela al plano, para lo cual el producto escalar de un vector director de la recta y un vector normal al plano tiene que ser cero.

Un vector director de la recta puede ser $\overrightarrow{v} = (4,\ -3,\ 3)$ y un vector normal del plano puede ser $\overrightarrow{n} = (3,\ 4,\ 0)$.

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{n} = (4,\ -3,\ 3) \cdot (3,\ 4,\ 0) = 12 - 12 + 0 = 0.$$

En efecto, la recta y el plano son paralelos.

La distancia del punto al plano es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

Un punto de la recta r es P(3, 1, -2).

La distancia de un punto a una recta es: $d(P,\ r) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, siendo A, B y C los coeficientes de la ecuación general del plano.

En el caso que nos ocupa sería:

$$d(P,\ r) = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 7}{\pm\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{9 + 4 - 0 + 7}{+\sqrt{9 + 16 + 0}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{4} = \underline{\underline{4\ \ unid. = d(P,\ r)}}$$

****

4ª) Un segmento con origen en el punto A(-1, 4, -2) y extremo en el punto B está dividido en cinco partes iguales mediante los puntos de división $A_1,\ A_2,\ A_3\ \ y\ \ A_4$, según indica la figura. Si sabemos que $A_2(1,\ 0,\ 2)$, ¿cuáles son las coordenadas de B?

$$\overrightarrow{AB} = 5 \cdot \overrightarrow{AA_1}\ \ ;;\ \ \overrightarrow{AA_2} = 2 \cdot \overrightarrow{AA_1}\ \ ;;\ \ \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA_2} \ \ \Rightarrow \ \ \overrightarrow{AB} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AA_2} = \frac{5}{2} \cdot \overrightarrow{AA_2} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot (A_2 - A) = \frac{5}{2} \cdot [(1,\ 0,\ 2) - (-1,\ 4,\ -2)] = \frac{5}{2} \cdot (2,\ -4,\ 4) = \underline{(5,\ -10,\ 10) = \overrightarrow{AB}}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A \ \ \Rightarrow \ \ (5,\ -10,\ 10) = (x,\ y,\ z) - (-1,\ 4,\ -2) = (x+1,\ y-4,\ z+2) \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \ \left. \begin{cases} x+1 = 5 \ \rightarrow \ \underline{x = 4} \\ y-4 = -10 \ \rightarrow \ \underline{y = -6} \\ z+2 = 10 \ \rightarrow \ \underline{z = 8} \end{cases} \right\} \ \ \Rightarrow \ \ \underline{\underline{B(4,\ -6,\ 8)}}$$

****

PROBLEMAS

1º) La recta tangente a la parábola $y = 3 - x^2$ en el punto M situado en el interior del primer cuadrante $(x > 0,\ \ y > 0)$, corta al eje OX en el punto A y el eje OY en B.

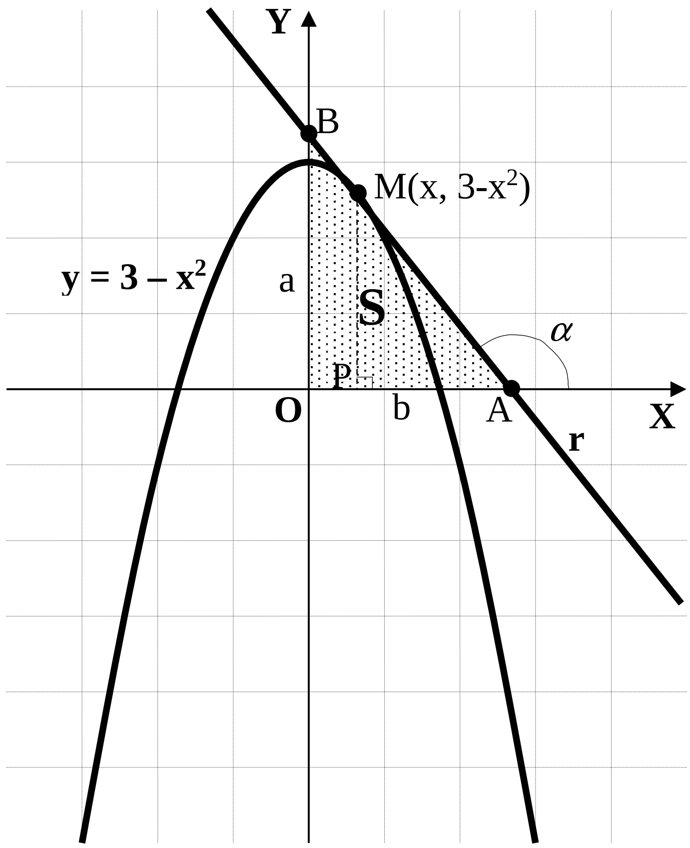
a) Hacer un gráfico de los elementos del problema

b) Hallar las coordenadas M que hacen que el triángulo OAB tenga área mínima.

----

a)

x	y
0	3
1	1
-1	1
2	-1
-2	-1
3	-6
-3	-6



b)

El punto M, por pertenecer a la parábola tiene de coordenadas $B\left(3 - x^2\right)$.

Teniendo en cuenta que la pendiente a la curva en cualquier punto es la derivada en ese punto, sería:

$$y' = -2x = m = tag\ \alpha = -\frac{a}{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{a = 2bx}$$

El valor de la superficie es el área del triángulo rectángulo de lados a y b. Con objeto de expresar a en función de b tendremos en cuenta que los triángulos rectángulos OAB y MPA son semejantes, por lo cual se puede establecer la siguiente relación:

$$\frac{a}{b}=\frac{\overline{MP}}{\overline{PA}}=\frac{3-x^2}{b-x}\;;;\;\frac{2bx}{b}=\frac{3-x^2}{b-x}\;;;\;2x=\frac{3-x^2}{b-x}\;;;\;2bx-2x^2=3-x^3\;;;\;2bx=x^2+3\;;;$$

$$\underline{b=\frac{x^2+3}{2x}}\;;;\;a=2bx=2\cdot\frac{x^2+3}{2x}\cdot x=\underline{x^2+3=a}$$

El área de la superficie pedida es: $S=\frac{a\cdot b}{2}$. Sustituyendo los valores de a y b:

$$S=\frac{\frac{x^2+3}{2x}\cdot\left(x^2+3\right)}{2}=\underline{\frac{1}{4}\frac{\left(x^2+3\right)^2}{x}=S}$$

Para que el área sea mínima es necesario que la derivada sea cero:

$$S'=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left[2\left(x^2+3\right)\cdot 2x\right]\cdot x-\left(x^2+3\right)^2\cdot 1}{x^2}=\underline{\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(x^2+3\right)\left(4x^2-1\right)}{x^2}=S'}$$

$$S'=0\;\Rightarrow\;4x^2-1=0\;;;\;4x^2=1\;;;\;x^2=\frac{1}{4}\;;;\;x=\pm\sqrt{\frac{1}{4}}\;\Rightarrow\;\underline{x=\frac{1}{2}}$$

$$y=3-x^2=3-\left(\frac{1}{2}\right)^2=3-\frac{1}{4}=\frac{12-1}{4}=\underline{\frac{11}{4}=y}\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{M\left(\frac{1}{2},\;\frac{11}{4}\right)}}$$

****

2º) Considerar la función $f(x) = 4x - x^2$:

a) Hacer un gráfico de los elementos del problema

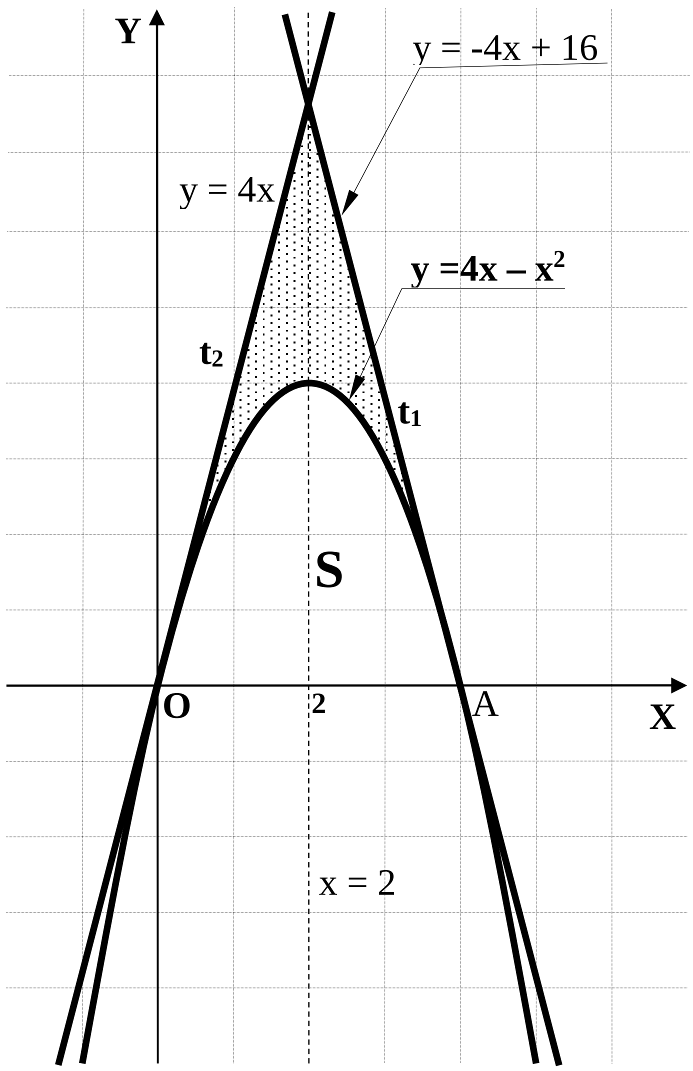
b) Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica f en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 4$.

c) Calcular el área comprendida entre la gráfica de f y las rectas tangentes halladas en el apartado a).

----

a)

x	y
0	0
1	3
-1	-5
2	4
3	3
4	0
5	-5



b)

La pendiente a la función en un punto es la derivada en ese punto:

$$f'(x) = 4 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow m = 4 - 2 \cdot 0 = \underline{4 = m_{(0)}} \\ \\ x = 4 \rightarrow m = 4 - 2 \cdot 4 = 4 - 8 = \underline{-4 = m_{(4)}} \end{cases}$$

$$f(x)=4x-x^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} f(0)=0 \;\rightarrow\; \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ f(4)=4\cdot 4-4^2=16-16=0 \;\rightarrow\; \underline{A(4,\ 0)} \end{cases}$$

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula: $y-y_0=m(x-x_0)$, sería en cada caso:

$$x=0 \;\rightarrow\; y-0=m_{(0)}(x-0) \;;;\; y=4x \;\Rightarrow\; \underline{\underline{t_1 \equiv 4x-y=0}}$$

$$x=4 \;\rightarrow\; y-0=m_{(4)}(x-4) \;;;\; y=-4(x-4)=-4x+16 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{t_2 \equiv 4x+y-16=0}}$$

c)

Teniendo en cuenta que las tangentes son simétricas con respecto al eje de la parábola, que es la recta x = 2, el área pedida es, teniendo en cuenta la simetría y que las ordenadas de la recta son mayores que los de la parábola, la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^2\left[4x-\left(4x-x^2\right)\right]\cdot dx=2\cdot\int_0^2\left(4x-4x+x^2\right)\cdot dx=2\cdot\int_0^2 x^2\cdot dx=2\cdot\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=$$

$$=2\cdot\left(\frac{2^3}{3}-0\right)=\underline{\underline{\frac{16}{3}\,u^2=S}}$$

****