PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2005(B)

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder sólo a tres de las cuatro cuestiones y resolver sólo uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos. Se puede hacer uso de cualquier calculadora, excepto las que usen un sistema operativo de ordenador tipo WINDOWS/LINUX.

CUESTIONES

1ª) En un sistema encontramos, entre otras, las ecuaciones siguientes: $x+2y-3z=5$ y $2x+4y-6z=-2$. ¿Qué puede decir de las soluciones del sistema?

Sabiendo que una ecuación lineal con tres incógnitas representa un plano, y que los coeficientes de las incógnitas determinan un vector normal al plano, los planos dados tienen como vectores normales $\overrightarrow{n_1}=(1,\ 2,\ -3)$ y $\overrightarrow{n_2}=(2,\ 4,\ -6)$, que son linealmente dependientes, lo cual implica, necesariamente, que los planos son coincidentes o paralelos, según que la relación de los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes sean iguales o no, respectivamente.

De lo anterior se deduce que los planos dados son paralelos, por lo tanto, no tienen ningún punto en común.

Independientemente del resto de las ecuaciones del sistema podemos asegurar que el sistema es incompatible, o sea, que no existen soluciones.

****

2ª) Considerar los vectores de R^3 :

$$\overrightarrow{v_1} = (-1,\ 3,\ 4),\ \overrightarrow{v_2} = (2,\ -1,\ -3)\ y\ \overrightarrow{v_3} = (1,\ 2k+1,\ k+3)$$

a) Hallar el único valor de k para el cual estos vectores no forman base de R^3.

b) Para un valor de k diferente del que ha encontrado en el apartado a), ¿cuáles son las componentes del vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3}$ en la base $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\}$?

----

a)

Tres vectores no nulos forman una base de R^3 cuando son linealmente independientes, o sea, el rango de la matriz que determinan es tres.

La matriz que determinan los vectores dados es $M = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{pmatrix}$.

Para que los vectores $\overrightarrow{v_1} = (-1,\ 3,\ 4),\ \overrightarrow{v_2} = (2,\ -1,\ -3)\ y\ \overrightarrow{v_3} = (1,\ 2k+1,\ k+3)$ no formen base de R^3 tiene que ser:

$$Rango\ \{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{v_3}\} = Rango\ \ M < 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = 0 .$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \\ 1 & 2k+1 & k+3 \end{vmatrix} = (k+3) + 8(2k+1) - 9 + 4 - 6(k+3) - 3(2k+1) = 0\ \ ;;$$

$$-5(k+3) + 5(2k+1) - 5 = 0\ \ ;;\ \ (k+3) - (2k+1) + 1 = 0\ \ ;;\ \ k+3-2k-1+1 = 0\ \ ;;\ \ \underline{\underline{k=3}}$$

b)

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} = (-1,\ 3,\ 4) + (2,\ -1,\ -3) + (1,\ 2k+1,\ k+3) = (2,\ 2k+3,\ k+4)$$

$$\underline{\underline{\overrightarrow{w} = (2,\ 2k+3,\ k+4),\ \forall k \in R,\ k \neq 3}}$$

****

3ª) Hallar la distancia entre la recta r y el plano π cuyas ecuaciones son las siguientes: $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ y $\pi \equiv 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

La distancia de una recta a un plano paralelo es igual que la distancia de cualquier punto de la recta al plano. (Si la recta y el plano no son paralelos, su distancia es cero, ya que son secantes).

La recta r es perpendicular al plano π por ser el vector director de la recta y el vector normal al plano linealmente dependientes: $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n} = (2,\ -3,\ 3)$, (en este caso son iguales).

La distancia de un punto a un plano es: $d(P,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Un punto de la recta r es, por ejemplo, P(3, 1, -2).

$$d(\pi,\ r) = d(P,\ \pi) = \frac{|\ 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|6 - 3 - 6 + 5|}{\sqrt{4 + 9 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{22}} = \frac{2\sqrt{22}}{22} = \frac{\sqrt{22}}{11}$$

$$\underline{\underline{d(\pi,\ r) = \frac{\sqrt{22}}{11}\ u}}$$

****

4ª) Dados los puntos A(1, 0, 0) y B(0, 0, 1):

a) Hallar un punto C sobre la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ de manera que el triángulo ABC se rectángulo en C.

b) Hallar el área del triángulo ABC .

----

a)

Un punto C de recta r es $C(1,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda)$.

Para que el triángulo ABC sea rectángulo en C es necesario que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ tienen que ser perpendiculares, o sea, que su producto escalar tiene que ser cero.

$$\overrightarrow{CA} = A - C = (1,\ 0,\ 0) - (1,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda) = (0,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda)$$

$$\overrightarrow{CB} = B - C = (0,\ 0,\ 1) - (1,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda) = (1,\ 1+\lambda,\ \lambda)$$

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \ \Rightarrow \ (0,\ 1+\lambda,\ 1+\lambda) \cdot (1,\ 1+\lambda,\ \lambda) = 0 \ ;;\ 0 + (1+\lambda)^2 + \lambda(1+\lambda) = 0 \ ;;$$

$$1 + 2\lambda + \lambda^2 + \lambda + \lambda^2 = 0 \ ;;\ 2\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0.$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow C_1\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) \ ;; \ \lambda_2 = -1 \Rightarrow C_2(1,\ 0,\ 0) \equiv A$$

El punto que cumple la condición es $\underline{\underline{C\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)}}$

b)

Los vectores que determinan el ángulo recto del triángulo ABC son los siguientes: $\overrightarrow{CA} = \left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ y $\overrightarrow{CB} = \left(1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$.

Por ser el triángulo rectángulo, el área es la mitad del producto de los módulos de los vectores que forman el ángulo recto:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{4}} \cdot \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot \sqrt{12} = \frac{1}{8} \cdot 2\sqrt{3} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}\ u^2 = S_{ABC}}}$$

****

PROBLEMAS

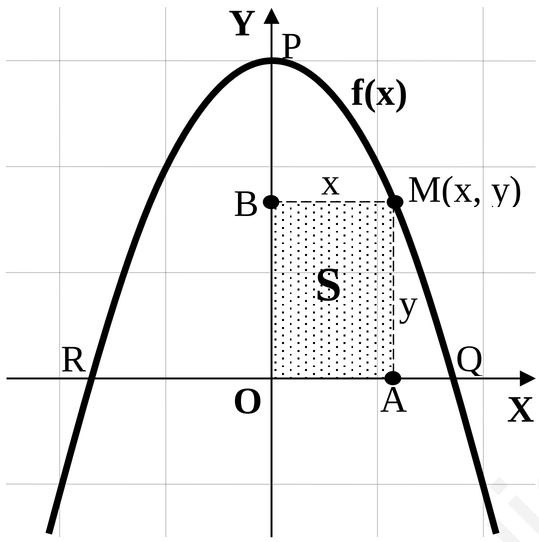
1º) Se considera la función $f(x) = 3 - x^2$ y un punto de su gráfica M, situado en el primer cuadrante $(x \geq 0,\ y \geq 0)$. Si por el punto M trazamos paralelas a los ejes de coordenadas, su intersección con OX y OY determina dos puntos A y B, respectivamente, se pide:

a) Hacer un gráfico de los elementos del problema.

b) Hallar las coordenadas del punto M para que el rectángulo OAMB tenga el área máxima.

----

a)



La función es una parábola cóncava, simétrica con respecto al eje OY.

El punto de corte con el eje de ordenadas es:

$$f(x) = 3 - x^2 \ \rightarrow\ x = 0 \ \rightarrow\ f(0) = 3 \Rightarrow \underline{P(3,\ 0)}$$

Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen igualando a cero la función:

$$f(x) = 3 - x^2 = 0 \ ;;\ x_1 = \sqrt{3} \ ;;\ x_2 = -\sqrt{3} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ Q(\sqrt{3},\ 0) \ y \ R(-\sqrt{3},\ 0).$$

b)

El área del rectángulo es S = x · y.

Teniendo en cuenta que el punto M(x, y) pertenece a la función, el valor de la ordenada es $y = 3 - x^2$. Sustituyendo este valor en la expresión del área, queda:

$$S = x \cdot y = x \cdot (3 - x^2) = \underline{3x - x^3}$$

Para que el área sea máxima, su derivada tiene que ser cero:

$$S' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \ ;;\ x_2 = -1.$$

Por condición del problema tiene que ser x > 0, por lo tanto, la solución es para el valor x = 1.

Para justificar que se trata de la superficie máxima, el valor de la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor de x encontrado:

$$S''=-6x \quad \Rightarrow \quad S''(1)=-6\cdot 1=-6<0, \;\Rightarrow\; \underline{Máximo,\;\; c.q.j.}$$

El punto M pedido es el que tiene por coordenada $x=1$ e $y=f(1)=3-1=2$.

$$\underline{\underline{M(1,\;2)}}$$

****

2º) Considerar la función $f(x)=\begin{cases} x^2+x+b & si \;\; x<0 \\ ae^{bx} & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$, donde a y b son números reales.

a) ¿Qué condición tienen que cumplir a y b para que f sea continua en todo R?

b) Para a = 1 y b = 1, calcular $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot dx$.

----

a)

La función f(x) está definida para cualquier valor real de x y es continua en todo R, excepto para x = 0 que estudiaremos aparte, por ser una función definida en dos trozos en los cuales la función es continua por tratarse de una expresión polinómica y otra exponencial que son continuas en sus respectivos dominios.

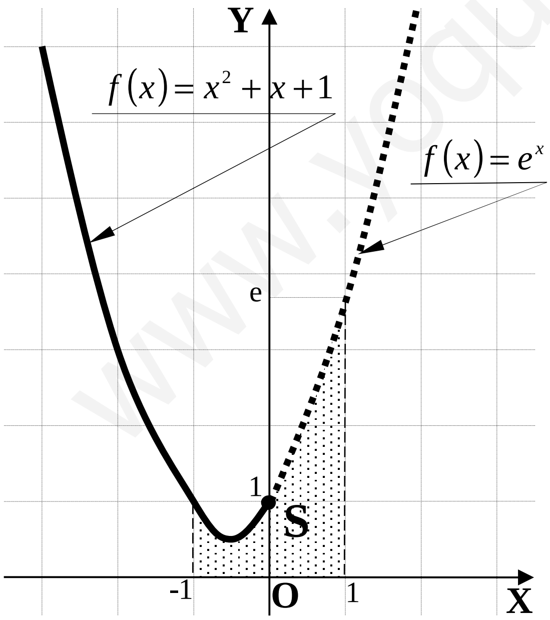
Para que la función sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(x^2+x+b\right)=\underline{b} \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(a\,e^{bx}\right)=\underline{a}=\underline{f(0)} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b=a}$$

<u>Para que la función sea continua en R, a y b tienen que ser valores reales iguales.</u>

b)

Para a = b = 1 la función resulta ser $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & si \;\; x<0 \\ e^{x} & si \;\; x\geq 0 \end{cases}$, que según el apartado anterior es continua y cuya representación gráfica aproximada se expresa en la figura adjunta.



De la figura se deduce el valor del área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_{-1}^{0}\left(x^2+x+1\right)\cdot dx+\int_{0}^{1}e^x\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{0}+\left[e^x\right]_0^1=-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1\right)+e-1=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1+e-1=e+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{6e+2-3}{6}=\underline{\underline{\frac{6e-1}{6}\;u^2=S}}$$

****