

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****JUNIO – 2005(A)**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

CUESTIONES

1ª) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donde a y b son números reales, hallar los valores de a y b que hacen que las dos matrices conmuten, es decir, que hacen que se cumpla que $A \cdot B = B \cdot A$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & b+a \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & a+b \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot B = B \cdot A, \forall a, b \in R}}$$

2ª) Dada la función $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calcular la integral $I = \int f(x) \cdot dx$.

b) Hallar la primitiva F de f que verifica $F(1) = 1$.

a)

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} \cdot dx \Rightarrow \begin{cases} 5x^2 - 4 = t \\ 10x \cdot dx = dt \\ xdx = \frac{1}{10} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow I = \frac{1}{10} \int \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot dt = \frac{1}{10} \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{10} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{5} \sqrt{t} + C = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C = I$$

b)

$$F(x) = I = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C \Rightarrow F(1) = 1 \Rightarrow \frac{1}{5} \sqrt{5 \cdot 1^2 - 4} + C = 1 \;; \sqrt{5-4} + 5C = 5 \;;$$

$$1 + 5C = 5 \;; \; 5C = 4 \;; \; \underline{C = \frac{4}{5}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + \frac{4}{5}$$

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{5} (\sqrt{5x^2 - 4} + 4)}}$$

3ª) Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

$$f'(x) = 30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 30x^2(x^2 - 2x + 1) = \underline{30x^2(x-1)^2 = f'(x)}$$

$$f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x = \underline{60x(2x^2 - 3x + 1) = f''(x)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 30x^2(x-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = 1} \end{cases}$$

$$f''(x) = 60x(2x^2 - 3x + 1) \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = 0 \Rightarrow \underline{Ni \text{ máx. ni mín.}} \\ f''(1) = 60 \cdot (2 - 3 + 1) = 0 \Rightarrow \underline{Ni \text{ máx. ni mín.}} \end{cases}$$

La función no tiene máximos ni mínimos relativos.

Se trata de una función monótona creciente en su dominio, que es $\mathbb{R}$, por ser:

$$\underline{f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} .}$$

4ª) Sea la parábola $y = 2x^2 + x + 1$ y sea A el punto de la parábola de abscisa 0.

a) Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto A.

b) ¿En qué punto de la parábola la recta tangente es perpendicular a la recta que ha hallado en el apartado anterior.

a)

Las coordenadas del punto A son: $y_{(0)} = 2 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow \underline{A(0, 1)}$

$$y' = 4x + 1 \Rightarrow m = y'_{(0)} = 4 \cdot 0 + 1 = \underline{1 = m}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 1 = 1 \cdot (x - 0) ;; y - 1 = x ;; \underline{t \equiv x - y + 1 = 0}$$

b)

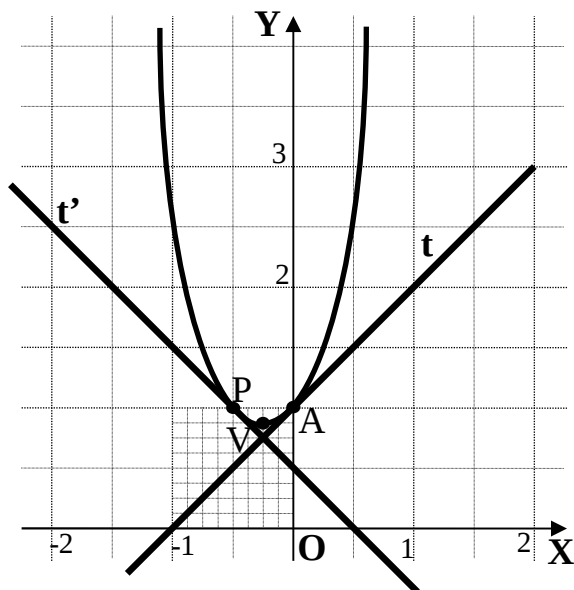
Las rectas perpendiculares tienen las pendientes inversas y de signo contrario, por lo tanto, la pendiente de la perpendicular es:

$$m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{1} = \underline{-1 = m'}$$

$$y' = 4x + 1 = m' = -1 ;; 4x + 1 = -1 ;; 4x = -2 ;; 2x = -1 ;; x = \underline{-\frac{1}{2}}$$

$$y_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P\left(-\frac{1}{2}, 2\right)}}$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la siguiente:



$$y' = 0 \Rightarrow 4x + 1 = 0 ;; x = \underline{-\frac{1}{4}}$$

$$y_{\left(-\frac{1}{4}\right)} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 1 =$$

$$= \frac{1 - 2 + 8}{8} = \frac{7}{8} \Rightarrow \underline{V\left(-\frac{1}{4}, \frac{7}{8}\right)}$$

PROBLEMAS

1º) De tres números x , y , z , sabemos lo siguiente: que el primero más el segundo suman 0; que el primero más el tercero suman 1; que la suma de los tres vale 0 y, por último, que el primero multiplicado por el número k más el doble de la suma del segundo y el tercero da 1.

a) ¿Qué se puede decir del valor de k ?

b) ¿Cuánto valen los tres números?

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x + z = 1 \\ x + y + z = 0 \\ kx + 2(y + z) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{De las tres primeras se deduce que: } \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{z = 0}} \\ \underline{\underline{x = 1}} \\ \underline{\underline{y = -1}} \end{array} \right.$$

Sustituyendo estos valores en la cuarta ecuación se tiene:

$$k \cdot 1 + 2 \cdot (-1 + 0) = 1 \quad ; \quad k - 2 = 1 \quad ; \quad \underline{\underline{k = 3}}$$

a) De k se puede decir que vale 3.

b) Los números valen: $x = 1$; $y = -1$; $z = 0$.

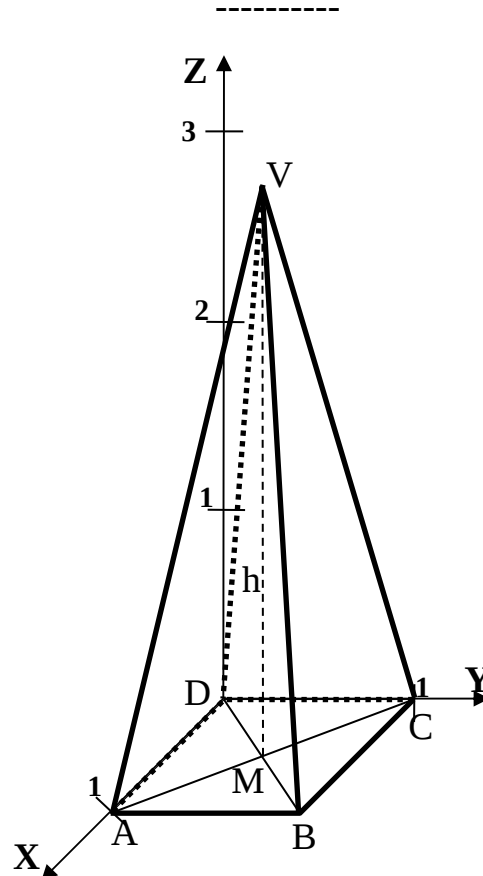
2º) Una pirámide de base cuadrada tiene el vértice en el plano de ecuación $z = 3$. Tres de los vértices de la base con los puntos del plano OXY siguientes: A(1, 0, 0), B(1, 1, 0) y C(0, 1, 0).

a) Hacer un gráfico de los elementos del problema. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto vértice, D?

b) ¿Cuál es el volumen de la pirámide? $\left(V = \frac{\text{área base} \cdot \text{altura}}{3} \right)$

c) Si el vértice de la pirámide es V(a, b, 3), ¿cuál es la ecuación de la recta que contiene a la altura sobre la base?

a)



Como puede apreciarse, el cuarto vértice de la base es D(0, 0, 0).

b)

La base es un cuadrado de lado la unidad y la altura es de 3 unidades.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot 3 = \underline{\underline{1 \text{ u}^3 = V}}$$

c)

Como la base es perpendicular al eje Z, un vector director de la recta que lo contiene es $\vec{v} = (0, 0, 1)$ y la ecuación de la recta sería:

$$\underline{\underline{h \equiv (x, y, z) = (a, b, 0) + \lambda(0, 0, 1)}}$$
