# PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

# COMUNIDAD DE CATALUÑA

# JUNIO – 2006

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

A continuación encontrarás el enunciado de cuatro cuestiones y dos problemas. Tienes que responder a tres de las cuatro cuestiones y resolver uno de los dos problemas (puedes elegir las cuestiones y el problema que quieras). En las respuestas has de explicar en que te basas y por qué. La puntuación de cada cuestión son dos puntos y el problema cuatro puntos.

## OPCIÓN A

### CUESTIONES

1ª) Encuentre las coordenadas de los puntos situados sobre la recta r de ecuación vectorial $r \equiv (x,\ y,\ z) = (-1,\ 1,\ 1) + t \cdot (1,\ 2,\ 1)$ que están a la distancia de una unidad del plano $\pi \equiv 2x + 2y + z = 5$.

---

Los puntos genéricos de la recta r son de la forma $P(-1+t,\ 1+2t,\ 1+t)$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ a un plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicada al caso que nos ocupa, teniendo en cuenta que la distancia es de una unidad:

$$d(P,\ \pi) = 1 \Rightarrow \frac{|2 \cdot (-1+t) + 2 \cdot (1+2t) + 1 \cdot (1+t) - 5|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|-2 + 2t + 2 + 4t + 1 + t - 5|}{\sqrt{4+4+1}} = 1 \ ;;$$

$$\frac{|7t-4|}{\sqrt{9}} = 1 \ ;; \ \frac{|7t-4|}{3} = 1 \ ;; \ |7t-4| = 3 \Rightarrow \begin{cases} 7t - 4 = 3 \ ;; \ 7t = 7 \ ;; \ \underline{t_1 = 1} \\ 7t - 4 = -3 \ ;; \ 7t = 1 \ ;; \ \underline{t_2 = \dfrac{1}{7}} \end{cases}$$

Los puntos que cumplen la condición son:

$$P(-1+t,\ 1+2t,\ 1+t) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0,\ 3,\ 2)}}$$

$$P(-1+t,\ 1+2t,\ 1+t) \Rightarrow t=\frac{1}{7} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+\frac{1}{7}=\underline{-\frac{6}{7}=x} \\ y=1+\frac{2}{7}=\underline{\frac{9}{7}=y} \\ z=1+\frac{1}{7}=\underline{\frac{8}{7}=z} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P_2\left(-\frac{6}{7},\ \frac{9}{7},\ \frac{8}{7}\right)}}$$

**********

2ª) Averigüe si el sistema $\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x+4y+3z=0 \\ x+y+mz=0 \end{cases}$ puede ser compatible indeterminado para algún valor de m.

---

Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas; para que sea compatible indeterminado, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el rango de la matriz de coeficientes tiene que ser menor que tres, o sea, su determinante tiene que ser cero.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = 0 \;;;\; 4m+4+9-8-3-6m=0 \;;;\; 2-2m=0 \;;;\; 1-m=0 \;;;\; \underline{m=1}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m=1 \Rightarrow Rang \;\; A=2<n^{o} \;\; incóg. \Rightarrow Compatible \;\; Indeterminado.}}$$

**********

3ª ) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ $y$ $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$:

a ) Calcule A · B y B · A.

b ) Compruebe que $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

---

a )

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-4 & 1+1\\ 2-4 & 2+1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}=A\cdot B}}$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & -1-1\\ 4-2 & -4+1\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=B\cdot A}}$$

b )

$$(A+B)^2=\left[\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\right]^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 6 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4+0 & 0-0\\ 12-12 & 0+4\end{pmatrix}=$$

$$=\underline{\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=(A+B)^2}$$

$$A^2+B^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-2 & -1+1\\ 2-2 & -2+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1+4 & 1-1\\ 4-4 & 4+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=A^2+B^2}$$

$$\underline{\underline{(A+B)^2 = A^2 + B^2,\ \ c.q.c.\ \ (como\ \ queríamos\ \ comprobar)}}$$

**********

4ª) Encuentre el dominio y las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$.

---

Por tratarse de una función racional, su dominio es R, excepto el conjunto de valores reales de x que anulan el denominador.

En el caso que nos ocupa el dominio es: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R-\{1\}}}$.

Las asíntotas pueden ser horizontales, verticales u oblicuas.

Las asíntotas horizontales son de la forma y = k, o sea, son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer más infinito o menos infinito.

La función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$ no tiene asíntotas horizontales por lo siguiente:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-4x+1}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+1}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-4+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{-\infty-4-0}{1+0}=-\infty$$

Como se observa, ambos límites son infinito.

Las asíntotas horizontales son de la forma x = k; son los valores finitos de x para los cuales la función toma valor infinito, o sea, son los valores de x que anulan el denominador.

La función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$ tiene como <u>asíntota vertical la recta x = 1.</u>

Las asíntotas oblicuas son de la forma y = mx + n, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+1}{x(x-1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+1}{x^2-x}=\underline{1=m}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4x+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+1-x^2+x}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x+1+x}{x-1}=\underline{-3=n}$$

La función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 1}$ tiene como <u>asíntota oblicua la recta y = x - 3.</u>

**********

PROBLEMAS

1º) Una recta r pasa por el punto A(3, 0, 2) y tiene la dirección del vector $\overrightarrow{v} = (-1,\ 1,\ 4)$

a ) Encuentre el ángulo que forma r con el plano horizontal.

b ) Compruebe que no pasa por el punto B(1, 3, 10).

c ) Encuentre la ecuación de la recta s que pasa por A y B.

---

a )

La recta r forma con el plano horizontal el ángulo complementario que forma con cualquier vector vertical, por ejemplo con el vector $\overrightarrow{k} = (0,\ 0,\ 1)$.

Del concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}$$

Aplicando la fórmula anterior al caso que nos ocupa y teniendo en cuenta que el seno de un ángulo es igual al coseno del complementario y considerando el primer párrafo del apartado, resulta:

$$sen\ \alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{k}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{k}\right|} = \frac{(-1,\ 1,\ 4) \cdot (0,\ 0,\ 1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 4^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{-0+0+4}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{1}} = \frac{4}{\sqrt{18}} = \underline{0'9428 = sen\ \alpha}$$

$$\alpha = arc\ \ sen\ 0'9428 = \underline{\underline{70^o\ \ 31'\ \ 44'' = \alpha}}$$

b )

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 + 4\lambda \end{cases}$.

Si pasara por el punto B(1, 3, 10) el valor de $\lambda$ tiene que ser 3, según se deduce del valor de y, pero para $\lambda = 3$ resulta el punto P(0, 3, 14), lo cual justifica que <u>el punto B no pertenece a la recta r, c. q. c.</u>

c )

Los puntos A(3, 0, 2) y B(1, 3, 10) determinan el vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = (-2,\ 3,\ 8)$, que es director de la recta s.

La expresión vectorial de s es: $\underline{\underline{s \equiv (x,\ y,\ z) = (3,\ 0,\ 2) + \lambda(-2,\ 3,\ 8)}}$

**********

2º) Considere la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$.

a ) Calcule c sabiendo que su recta tangente es el punto de abscisa x = 0 es horizontal.

b ) Para el valor c encontrado en al apartado anterior, calcule a y b sabiendo que esta función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa x = -2 y que corta al eje OX cuando x = 1.

c ) Para los valores obtenidos en los otros apartados, calcule los intervalos donde la función crece y decrece, sus extremos relativos y dibuje una representación gráfica aproximada.

---

a )

La tangente de una función en un punto tiene como pendiente el valor de la derivada de la función en ese punto; si la tangente es horizontal, su pendiente es cero para el valor de x = 0:

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c \;;;\; m = f'(0) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{c = 0}}$$

b )

Para c = 0 la función es $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + 7$.

Por tener un extremo relativo para x = -2 es necesario que se anule su primera derivada para el valor dado:

$$f'(x) = 4x^3 + 2bx \;\Rightarrow\; f'(-2) = 4 \cdot (-2)^3 + 2b \cdot (-2) = -4 \cdot 8 - 4b = -32 - 4b = 0 \;;;\; \underline{\underline{b = -8}}$$

La función resulta ser $f(x) = x^4 + ax^3 - 8x^2 + 7$.

Por cortar al eje OX para x = 1 es necesario que se anule la función para ese valor:

$$f(1) = 0 \;\Rightarrow\; 1^4 + a \cdot 1^3 - 8 \cdot 1^2 + 7 = 0 \;;;\; 1 + a - 8 + 7 \;;;\; \underline{\underline{a = 0}}.$$

$$\underline{\underline{La \;\; función \;\; es: \;\; f(x) = x^4 - 8x^2 + 7}}$$

Se trata de una función par, por lo cual es simétrica con respecto al eje OY.

c )

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x+2)(x-2) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = -2} \\ \underline{x_3 = 2} \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que por ser una función polinómica es continua y derivable en su dominio, que es R, para estudiar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento basta con estudiar un valor de cualquiera de los intervalos que determinan los valores que anulan la primera derivada, por ejemplo, x = 1:

Para x = 1 $\Rightarrow$ $f'(1) = 4 - 16 = -12 < 0 \Rightarrow$ *Decreciente.*

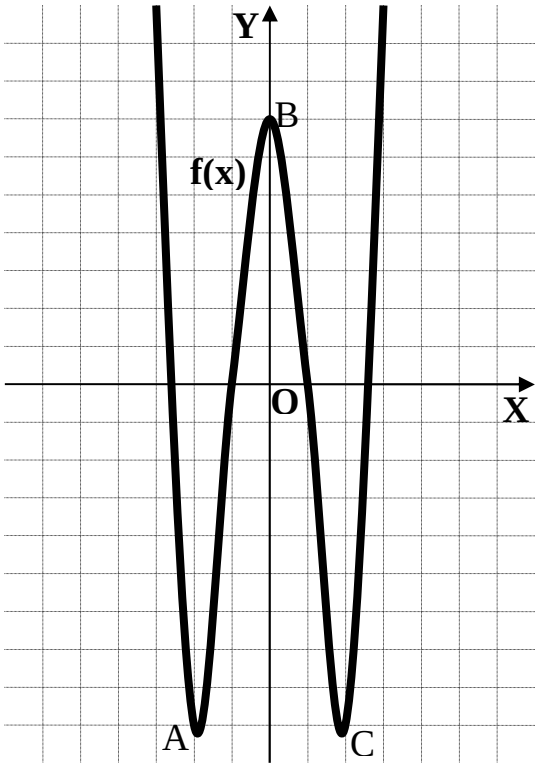
$$f'(x) = 4x(x+2)(x-2) \Rightarrow \begin{cases} (-\infty,\ -2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \textit{Decreciente} \\ (-2,\ 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \textit{Creciente} \\ (0,\ 2) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \textit{Decreciente} \\ (2,\ +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \textit{Creciente} \end{cases}$$

Para determinar los máximos y mínimos relativos recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = 12x^2 - 16 = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo relativo para } x = 0 \\ f''(2) = 48 - 16 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo para } x = 2 \\ f''(-2) = 48 - 16 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo para } x = -2 \end{cases}$$

$f(x) = x^4 - 8x^2 + 7 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(-2) = 16 - 32 + 7 = -9 \Rightarrow \\ \Rightarrow \textit{Mín.} \Rightarrow A(-2,\ -9) \\ \\ f(0) = 7 \Rightarrow \textit{Máx.} \Rightarrow B(0,\ 7) \\ \\ f(2) = 16 - 32 + 7 = -9 \Rightarrow \\ \Rightarrow \textit{Mín.} \Rightarrow C(2,\ -9) \end{cases}$$




La representación gráfica aproximada es la que se indica en la figura adjunta.

**********

OPCIÓN B

CUESTIONES

1ª) Considere la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calcule cuánto vale la pendiente de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 0. Averigüe si hay otros puntos en los que la pendiente de la tangente sea igual a la obtenida.

---

El punto de tangencia tiene por abscisa x = 0 y por coordenada el valor de la función para x = 0, o sea, f(0): $f(0)=\dfrac{0^2+1}{0+1}=1 \;\Rightarrow\; \underline{P(0,\ 1)}$.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto:

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}=\underline{\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=f'(x)}$$

$$m=f'(0)=\frac{0^2+2\cdot 0-1}{(0+1)^2}=\frac{-1}{1}=\underline{-1=m}$$

El valor de la pendiente para x = 0 es m = -1.

Veamos si existen otros puntos donde la pendiente (derivada) vale, también, -1:

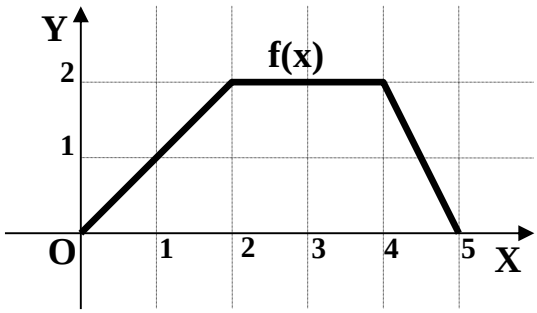
$$f'(x)=\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1\ ;;\ x^2+2x-1=-(x+1)^2=-(x^2+2x+1)=-x^2-2x-1\ ;;\ 2x^2+4x=0\ ;;$$

$$2x(x+2)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases} x_1=0\ \rightarrow\ f(0)=\dfrac{0^2+1}{0+1}=1\ \Rightarrow\ \underline{P(0,\ 1)}\quad (\textit{Punto estudiado}) \\ x_2=-2\ \rightarrow\ f(-2)=\dfrac{(-2)^2+1}{-2+1}=\dfrac{4+1}{-1}=-5\ \Rightarrow\ \underline{Q(-2,\ -5)} \end{cases}$$

En el punto Q(-2, -5) la pendiente a la función también es m = -1.

**********

2ª) Considere la función $y = f(x)$ definida para $x \in [0,\ 5]$ que aparece dibujada en la figura adjunta.




a ) ¿Cuál es la expresión de su función derivada cuando existe?

b ) Calcule $\int_0^3 f(x) \cdot dx$.

---

a )

La función puede definirse de la forma siguiente: $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \le x \le 2 \\ 2 & si\ \ 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{2}x & si\ \ 4 \le x \le 5 \end{cases}$.

La función derivada resulta ser: $\underline{\underline{f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \le x \le 2 \\ 0 & si\ \ 2 < x < 4 \\ -\frac{1}{2} & si\ \ 4 \le x \le 5 \end{cases}}}$.

b )

De la observación de la figura se deduce que:

$$\int_0^3 f(x) \cdot dx = \int_0^2 x \cdot dx + \int_2^3 2 \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 + [2x]_2^3 = \left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + (2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) = 2 + 6 - 4 = 4.$$

$$\underline{\underline{\int_0^3 f(x) \cdot dx = 4\ u^2}}$$

**********

3ª ) Determine la ecuación del plano $\pi$ perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que pasa por el punto P(1, 1, 2). ¿Qué distancia separa este punto del origen de coordenadas?

---

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;;;\; \underline{x = -2 - \lambda} \;;;\; y = x - 1 = \underline{-3 - \lambda = y} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{v} = (-1,\ -1,\ 1)$.

Si el plano $\pi$ tiene que ser perpendicular a la recta tiene que tener como vector normal cualquier director que sea linealmente dependiente de $\vec{v} = (-1,\ -1,\ 1)$, como por ejemplo el vector $\vec{n} = (1,\ 1,\ -1)$.

El haz de los infinitos planos perpendiculares a la recta r tiene por ecuación general la expresión $\alpha \equiv x + y - z + D = 0$, de los cuales el plano $\pi$ pedido tiene que satisfacer su ecuación para el punto P(1, 1, 2):

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv x + y - z + D = 0 \\ P(1,\ 1,\ 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 1 - 2 + D = 0 \;;;\; D = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}}$$

La distancia del punto P(1, 1, 2) al origen de coordenadas es igual que el módulo del vector $\overrightarrow{OP} = P - O = (1,\ 1,\ 2) - (0,\ 0,\ 0) = (1,\ 1,\ 2)$, es decir:

$$d = \overline{OP} = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \underline{\underline{\sqrt{6}\ unidades = d}}$$

**********

4ª) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores de m para los que el rango de la matriz A es menor que 3. ¿Puede ser Rang A = 1 para algún valor de m?

---

Para que el rango de la matriz A sea menor que 3 es necesario que su determinante sea cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix}=3-4m+m^2=m^2-4m+3=0 \;;;\; m=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{m_1=3} \\ \underline{m_2=1} \end{cases}$$

<u>Para m = 3 y m = 1 el rango de la matriz A es menor que 3.</u>

El rango de la matriz A no puede ser 1, independientemente de los valores que tome m, ya que el menor correspondiente a la matriz $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\neq 0$, lo que significa que el menor rango que puede tener la matriz A es dos.

**********

# PROBLEMAS

1º) Dada la función $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

a ) Encuentre su dominio y las posibles intersecciones con los ejes.

b ) Encuentre los intervalos donde crece y decrece y los extremos relativos.

c ) Encuentre sus posibles asíntotas

d ) Haga la representación gráfica aproximada de la función.

---

a )

La función está definida para cualquier valor real de x: $\underline{\underline{D(f) \Rightarrow R}}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ \ X \ \Rightarrow\ y = f(x) = 0\ \ ;;\ e^{-x^2+2x} \neq 0,\ \forall x \in R \ \Rightarrow\ \underline{\text{La función no corta al eje X.}}$$

$$Eje\ \ Y \ \Rightarrow\ x = 0\ \ ;;\ y = e^{-0^2+2\cdot 0} = e^0 = 1 \ \Rightarrow\ \underline{\underline{A(0,\ 1)}}$$

b )

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento se obtienen del estudio de la primera derivada:

$$f'(x) = (-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x} = 0 \ \Rightarrow\ -2x+2 = 0\ \ ;;\ -2(x-1) = 0 \ \Rightarrow\ \underline{x = 1}$$

Por tratarse de una función exponencial, es continua y derivable en su domino, que es R, por lo cual, para determinar el crecimiento y decrecimiento estudiamos un punto de uno de los intervalos que determina la raíz de la derivada, por ejemplo, para el valor de x = 0:

$$f'(0) = (-0+2)\cdot e^0 = 2\cdot e = 2e > 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} \underline{\underline{Para\ \ x < 1 \ \Rightarrow\ f'(x) > 0 \ \Rightarrow\ Creciente}} \\ \\ \underline{\underline{Para\ \ x > 1 \ \Rightarrow\ f'(x) < 0 \ \Rightarrow\ Decreciente}} \end{cases}$$

Para determinar si el valor que anula la primera derivada es un máximo o un mínimo relativo recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x) = -2\cdot e^{-x^2+2x} + (-2x+2)\cdot(-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x} = e^{-x^2+2x}\left[-2 + (-2x+2)^2\right] =$$

$$= e^{-x^2+2x}\cdot\left(-2+4x^2-8x+4\right) = \underline{2\left(2x^2-4x+1\right)\cdot e^{-x^2+2x} = f''(x)}$$

$$f''(1) = 2(2-4+1)\cdot e^{-1+2} = -2\cdot e = -2e < 0 \;\Rightarrow\; \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x=1}$$

$$f(1) = e^{-1^2+2\cdot 1} = e \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx.\ \Rightarrow\ B(1,\ e)}}$$

c )

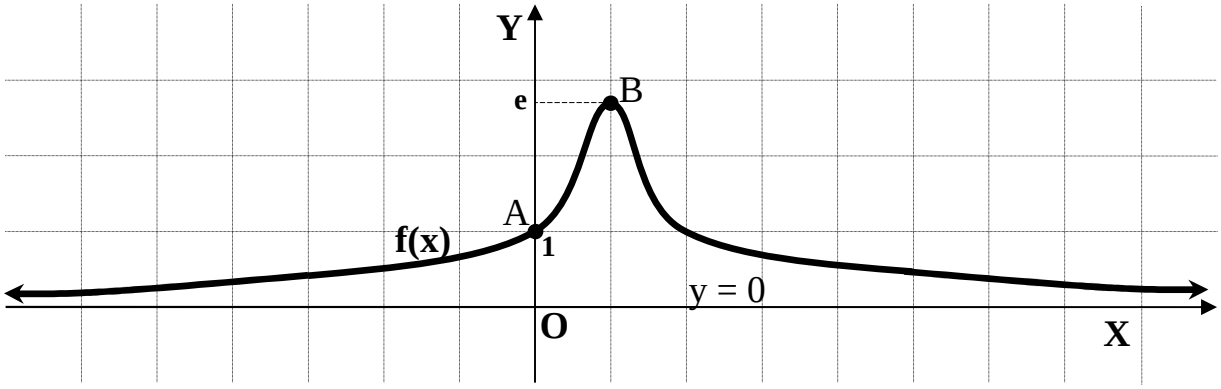
Por tratarse de una función exponencial, las posibles asíntotas son horizontales, que son de la forma y = k; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a más infinito o menos infinito:

$$y = k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+2x} = e^{-\infty} = \underline{0 = y}$$

<u>La recta y = 0 (Eje X) es asíntota vertical.</u>

d )

Con los datos anteriores puede hacerse una representación gráfica aproximada de la función, que es la siguiente:




**********

2º) Considere la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x-y+az+2=0$, donde a es un parámetro.

a ) Encuentre un vector director de la recta y un vector perpendicular al plano.

b ) ¿Cuál tiene que ser el valor de a para que la recta y el plano sean paralelos?

c ) Averigüe si existen valores de a para los que la recta y el plano sean perpendiculares. En caso afirmativo, calcúlelos.

d ) Averigüe si existen valores de a para los que la recta y el plano formen un ángulo de 30º. En caso afirmativo, calcúlelos.

---

a )

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x-5y-z-3=0 \\ x-3y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x-5y=3+\lambda \\ x-3y=2+\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x-5y=3+\lambda \\ -2x+6y=-4-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=-1-\lambda} \;;;$$

$$x=2+z+3y=2+\lambda+3(-1-\lambda)=2+\lambda-3-3\lambda=\underline{-1-2\lambda=x} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

$$\underline{\underline{Vector\ \ director\ \ de\ \ r:\ \vec{v}=(-2,\ -1,\ 1)\ \ ;;\ \ vector\ \ normal\ \ al\ \ plano:\ \vec{n}=(2,\ -1,\ a)}}$$

b )

Para que la recta r y el plano $\pi$ sean paralelos es necesario que el vector director de la recta y el vector normal al plano sean perpendiculares; es decir, que su producto escalar tiene que ser cero:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = (-2,\ -1,\ 1) \cdot (2,\ -1,\ a) = -4+1+a=0 \;;;\; -3+a=0 \;;;\; \underline{a=3}$$

<u>Para que la recta y el plano sean paralelos el valor de a tiene que ser tres.</u>

c )

Para que la recta r y el plano $\pi$ sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal al plano sean linealmente dependientes; es decir, que sean paralelos, para lo cual sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{-2}{2} \neq \frac{-1}{-1} = \frac{1}{a} \Rightarrow \underline{\underline{La\ \ recta\ \ r\ \ y\ \ el\ \ plano\ \ no\ \ son\ \perp\ \forall a \in R}}$$

d )

La recta r y el plano $\pi$ forman un ángulo de 30º cuando el vector director de la

recta y el vector normal al plano formen un ángulo de 60º. Aplicando el producto escalar de dos vectores:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = \left|\vec{v}\right| \cdot \left|\vec{n}\right| \cdot \cos 60^{o} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (-2,\ -1,\ 1) \cdot (2,\ -1,\ a) = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + a^2} \cdot \frac{1}{2} \ ;;$$

$$-4 + 1 + a = \sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+1+a^2} \cdot \frac{1}{2} \ ;; \ 2(a-3) = \sqrt{6} \cdot \sqrt{5+a^2} \ ;; \ 4(a-3)^2 = 6\left(5+a^2\right) \ ;;$$

$$2\left(a^2 - 6a + 9\right) = 3\left(5 + a^2\right) \ ;; \ 2a^2 - 12a + 18 = 15 + 3a^2 \ ;; \ a^2 + 12a - 3 = 0$$

$$a = \frac{-12 \pm \sqrt{144+12}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{156}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{4 \cdot 39}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{2} = -6 \pm \sqrt{39} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{a_1 = -6 + \sqrt{39}}} \\ \\ \underline{\underline{a_2 = -6 - \sqrt{39}}} \end{cases}$$

**********