PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Las cuestiones valen dos puntos y el problema 4 puntos.

Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos con más prestaciones que las mencionadas.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1º) Encuentre las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 2x - y + 2z = 3$ situados a 6 unidades de distancia del mismo.

Los planos paralelos a $\pi \equiv 2x - y + 2z - 3 = 0$ constituyen el haz de planos de ecuación $\alpha \equiv 2x - y + 2z + D = 0$.

La distancia de un punto a un plano es $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

El lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan 6 unidades del plano dado lo constituyen los dos planos pedidos que se obtienen considerando los dos signos posibles del valor absoluto de la expresión de la fórmula anterior.

$$6 = \frac{|2x - y + 2z - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|2x - y + 2z - 3|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|2x - y + 2z - 3|}{\sqrt{9}} = \frac{|2x - y + 2z - 3|}{3} \;;;$$

$$18 = \left| 2x - y + 2z - 3 \right| \Rightarrow \begin{cases} 18 = 2x - y + 2z - 3 \rightarrow \underline{\underline{\alpha_1 = 2x - y + 2z - 21 = 0}} \\ \\ 18 = -2x + y - 2z + 3 \rightarrow \underline{\underline{\alpha_2 = 2x - y + 2z + 15 = 0}} \end{cases}$$

****

2º) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & m+2\end{pmatrix}$ dependiente del parámetro m:

a) Estudie su rango según los valores de m.

b) Diga cuál es la posición relativa de los siguientes planos $\pi_1 \equiv x+y+2z=2$, $\pi_2 \equiv 2x+my+2mz=2+m$ y $\pi_3 \equiv mx+2y+(2+m)z=0$, según los valores de m.

----

a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & m & 2m\\ m & 2 & m+2\end{vmatrix}=m(m+2)+8+2m^2-2m^2-4m-2(m+2)=$$

$$=m^2+2m+8-4m-2m-4=m^2-4m+4=(m-2)^2=0 \Rightarrow \underline{m=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 2\ \Rightarrow Rango\ \ A=3}}$$

$$Para\ \ m=2\ \Rightarrow\ |A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 4\\ 2 & 2 & 4\end{vmatrix}\ \Rightarrow\ \{F_2=F_3=2F_1\}\ \Rightarrow\ \underline{Rango\ \ A=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=2\ \Rightarrow Rango\ \ A=1}}$$

b)

Como puede apreciarse, los coeficientes de los tres planos son las sucesivas filas de la matriz dada, por lo cual la matriz de coeficientes del sistema que constituyes es A.

La matriz ampliada es $A'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & 2\\ 2 & m & 2m & 2+m\\ m & 2 & m+2 & 0\end{pmatrix}$.

Para $m\neq 2$ los rangos de ambas matrices es tres, igual al número de incógnitas, por lo cual, el sistema es compatible determinado y, en consecuencia:

$$\underline{\underline{Para\ \ m\neq 2\ \ los\ \ planos\ \ \pi_1,\ \pi_2\ \ y\ \ \pi_3\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ un\ \ punto}}$$

Para m = 2 la matriz ampliada es la siguiente:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \underline{Rango \;\; A' = 2}$$

Para m = 2 el rango de la matriz de coeficientes es uno y el rango de la matriz ampliada es 2, por lo tanto, según el Teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es incompatible.

Como quiera que para m = 2 las filas primera y segunda de la matriz ampliada son linealmente dependientes y linealmente independientes de la tercera, la interpretación geométrica de la situación es que:

$$\underline{\underline{Para \;\; m = 2 \;\; los \;\; planos \;\; \pi_1, \; \pi_2 \;\; son \;\; coincidentes \;\; y \;\; palarelos \;\; al \;\; plano \;\; \pi_3}}$$

****

3º) Considere la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}$. Encuentre los valores p y q que hacen que se verifique $A^2=A$. En este caso, razone sin calcular qué vale A^{10}.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix}.$$

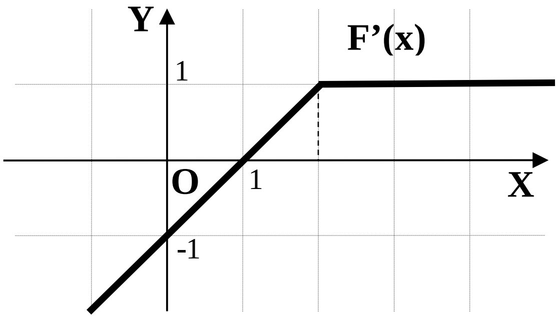
$$A^2=A \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & q \\ pq & p+q^2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{p=0}} \;\;;;\;\; \underline{\underline{q=1}}$$

Para p = 0 y q = 1 es $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donde se deduce que:

$$\underline{\underline{A^{10}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

4º) La función derivada F'(x) de una función continua $F : R \to R$ que pasa por el origen es una función definida a trozos formada por las semirrectas del dibujo.



Escriba la expresión de la función F(x) como una función definida a trozos.

La función $F'(x)$ es continua $\forall x \in R$ y puede definirse a trozos de la forma siguiente: $F'(x) = \begin{cases} x-1 & si \;\; x \le 2 \\ 1 & si \;\; x > 4 \end{cases}$.

La función F(x) es la función definida a trozos, que son cada uno de ellos, la integral indefinida de los trozos que determinan a la función derivada.

Siendo $\int (x-1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} - x + k$ e $\int 1 \cdot dx = x + C$, la función pedida es de la forma $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + k & si \;\; x \le 2 \\ x + C & si \;\; x > 2 \end{cases}$, con $k, \; C \in R$.

Teniendo en cuenta que F(x) pasa por el origen de coordenadas es <u>k = 0.</u>

Para determinar el valor de C tenemos en cuenta que F(x) es continua en R, lo cual significa que los límites laterales para el valor x = 2 tienen que ser iguales e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{2}x^2 - x \right) = 2 - 2 = \underline{0} = f(2) \\ \displaystyle \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2} (x + C) = 2 + C = \underline{0} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{C = -2}$$

La función pedida es $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x & si \;\; x \le 2 \\ x - 2 & si \;\; x > 2 \end{cases}$.

****

PROBLEMAS

5º) Una recta r es paralela a la recta $s \equiv x-1 = y-1 = z-1$, corta en un punto A a la recta $t \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$, y en un punto B a la recta $l \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

a) Halle la ecuación del plano π determinado por las rectas r y t.

b) Encuentre el punto B calculando el punto de intersección del plano anterior con la recta l.

c) Encuentre la ecuación de la recta r.

d) Encuentre el punto A.

----

a)

La recta r, por ser paralela a la recta s, tiene como vector director el mismo que r, o sea: $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$.

Un punto y un vector director de la recta t son P(1, 0, -1) y $\overrightarrow{v_t} = (3,\ 2,\ 1)$.

El plano que determinan las recta r y t puede obtenerse teniendo en cuenta que tiene como vectores directores a los de las rectas y contiene a cualquier punto que pertenezca a cualquiera de las rectas, por ejemplo, P(1, 0, -1); su ecuación general es:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_t}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ (x-1)+3y+2(z+1)-3(z+1)-2(x-1)-y=0 \ ;;$$

$$-(x-1)+2y-(z+1)=0 \ ;;\ -x+1+2y-z-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x-2y+z=0}}$$

b)

La expresión de la recta $l \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $l \equiv \begin{cases} x = 2+2\lambda \\ y = 1+2\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$.

Los puntos genéricos de l son de la forma $Q(2+2\lambda,\ 1+2\lambda,\ 3\lambda)$.

El punto B intersección de la recta l y del plano π tiene que satisfacer sus ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x-2y+z=0 \\ Q(2+2\lambda,\ 1+2\lambda,\ 3\lambda)\end{array}\right\} \Rightarrow (2+2\lambda)-2(1+2\lambda)+(3\lambda)=0 \ ;;\ 2+2\lambda-2-4\lambda+3\lambda=0 \ ;;\ \underline{\lambda=0}$$

$$\underline{\underline{B(2,\ 1,\ 0)}}$$

c)

La recta r pasa por B(2, 1, 0) y tiene vector director a $\overrightarrow{v_r}=(1,\ 1,\ 1)$.

La expresión vectorial es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv (x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 0)+\lambda(1,\ 1,\ 1)}}$$

d)

El punto A es la intersección de las rectas r y t:

Existen diversas formas de hallar el punto A de corte; una de ellas consiste en expresar las rectas por unas ecuaciones implícitas y resolver el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que forman:

$$r \equiv (x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 0)+\lambda(1,\ 1,\ 1) \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x-2=z \\ y-1=z \end{cases}}$$

$$t \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z+1 \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} 2x-2=3y \\ y=2z+2 \end{cases}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x-z=2 \\ y-z=1 \\ 2x-3y=2 \\ y-2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y-z=1 \\ y-2z=2 \end{array}\right\} \Rightarrow z+1=2z+2 \ ;;\ \underline{z=-1} \ ;;\ \underline{y=0} \ ;;\ \underline{x=1} \Rightarrow \underline{\underline{A(1,\ 0,\ -1)}}$$

****

6º) Dadas las funciones $f(x) = x^2 - ax - 4$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$:

a) Calcule a y b de manera que los gráficos de f(x) y de g(x) sean tangentes en el punto de abscisa x = 3, es decir, que tengan la misma recta tangente en este punto.

b) Halle la ecuación de la recta tangente mencionada en el apartado anterior.

c) Para el valor de a obtenido en el primer apartado, calcule el valor del área de la región limitada por el eje de abscisas OX y la función f(x).

----

a)

Como el punto de tangencia para x = 3 es común tiene que ser:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - ax - 4 \;;;\; f(3) = 3^2 - 3a - 4 = 5 - 3a \\ g(x) = \frac{x^2}{2} + b \;;;\; g(3) = \frac{3^2}{2} + b = \frac{9}{2} + b \end{array}\right\} \Rightarrow f(3) = g(3) \Rightarrow 5 - 3a = \frac{9}{2} + b \;;;$$

$$10 - 6a = 9 + 2b \;;;\; 9 - 6a = 2b \;;;\; \underline{6a + 2b = 9} \qquad (1)$$

Teniendo en cuenta que la pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto y, sabiendo que la pendiente es la misma para x = 3, es:

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 - ax - 4 \;;;\; f'(x) = 2x - a \;;;\; f'(3) = 6 - a \\ g(x) = \frac{x^2}{2} + b \;;;\; g'(x) = x \;;;\; g'(3) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(3) = g'(3) \Rightarrow 6 - a = 3 \;;;\; \underline{\underline{a = 3}}$$

Sustituyendo el valor de a en la expresión (1): $6 \cdot 3 + 2b = 9 \;;;\; 2b = -9 \;;;\; \underline{\underline{b = -\frac{9}{2}}}$

b)

El punto de tangencia se obtiene sustituyendo el valor de a o b en las ecuaciones correspondientes, por ejemplo:

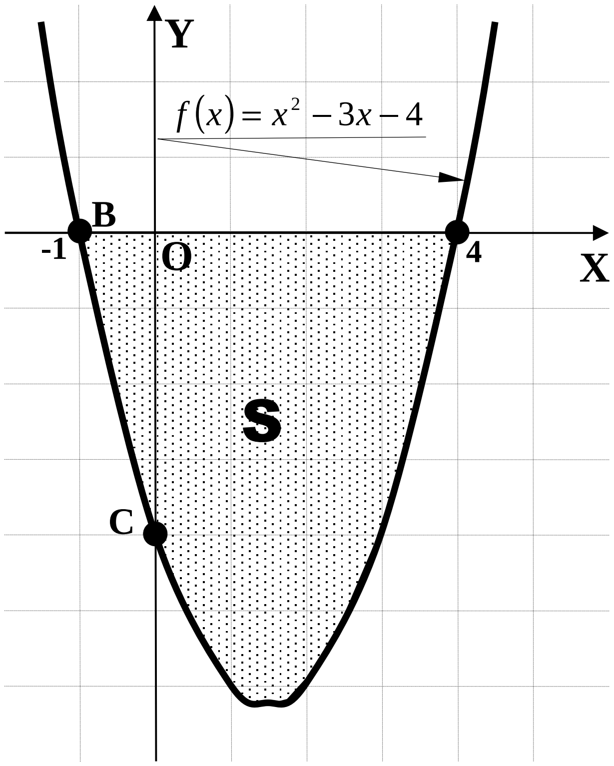
$$f(x) = x^2 - 3x - 4 \;;;\; f(3) = 9 - 6 - 4 = -1 \Rightarrow \underline{T(3,\; -1)}.$$

El valor de la pendiente se obtiene es $m = f'(3) = g'(3) = \underline{3 = m}$.

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la recta tangente es:

$$t \equiv y - (-1) = 3(x - 3) \;;;\; y + 1 = 3x - 3 \Rightarrow \underline{\underline{t \equiv 3x - y - 4 = 0}}$$

c)



Los puntos de corte de la función $f(x)=x^2-4x-4$ con los ejes de coordenadas son los siguientes:

$Eje\ \ X\ \Rightarrow\ f(x)=0\ \Rightarrow x^2-3x-4=0$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}\ \Rightarrow\ \left\{\begin{matrix} x_1=4 \\ x_2=-1 \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \underline{A(4,\ 0)}\ \ y\ \ \underline{B(-1,\ 0)}$

$Eje\ \ Y\ \Rightarrow\ x=0\ \Rightarrow\ \underline{C(0,\ -4)}$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

Teniendo en cuenta que todas las ordenadas de la superficie a calcular son negativas, su valor es el siguiente:

$$S=\int_4^{-1}\left(x^2-3x-4\right)\cdot dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}-4x\right]_4^{-1}=\left[\frac{(-1)^3}{3}-\frac{3\cdot(-1)^2}{2}-4\cdot(-1)\right]-$$

$$-\left(\frac{4^3}{3}-\frac{3\cdot 4^2}{2}-4\cdot 4\right)=-\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+4-\frac{64}{3}+24+16=44-\frac{3}{2}-\frac{65}{3}=\frac{264-9-130}{6}=$$

$$=\frac{264-139}{6}=\underline{\frac{125}{6}\ u^2=S}$$

****

OPCIÓN B

CUESTIONES

1º) ¿En qué punto la recta tangente a la función $f(x) = x \cdot e^x$ es paralela al eje de abscisas? Escriba la ecuación de la recta tangente en este punto.

Las rectas paralelas al eje de abscisas tienen de pendiente cero.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = \underline{e^x (x+1) = f'(x)}$$

$$m = f'(x) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; e^x (x+1) = 0 \;\;;;\;\; x+1 = 0 \;\;;;\;\; \underline{x = -1}$$

La recta tangente es paralela al eje de abscisas para el valor x = -1.

El punto de tangencia pedido es el siguiente:

$$f(-1) = -1 \cdot e^{-1} = -\frac{1}{e} \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{P\left(-1,\; -\frac{1}{e}\right)}}.$$

Sabiendo que la pendiente es cero y que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, la recta tangente es:

$$t \equiv y - \left(-\frac{1}{e}\right) = 0 \cdot (x-3) = 0 \;\;;;\;\; y + \frac{1}{e} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \underline{\underline{t \equiv ey + 1 = 0}}$$

****

2º) Considere los puntos $P(-1,\ a-1,\ 3)$, $Q(0,\ a-2,\ 1-a)$ y $R(2,\ -1,\ 6-6a)$.

a) Halle el valor de a para el cual los tres puntos están alineados.

b) Cuando los tres puntos están alineados, ¿cuál es la ecuación de la recta r que los contiene?

----

a)

Para que los puntos $P(-1,\ a-1,\ 3)$, $Q(0,\ a-2,\ 1-a)$ y $R(2,\ -1,\ 6-6a)$ estén alineados es necesario que los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}\ \ y\ \ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{PR}$ sean linealmente dependientes:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (0,\ a-2,\ 1-a) - (-1,\ a-1,\ 3) = \underline{(1,\ -1,\ -a-2) = \overrightarrow{u}}$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{PR} = R - P = (2,\ -1,\ 6-6a) - (-1,\ a-1,\ 3) = \underline{(3,\ -a,\ 3-6a) = \overrightarrow{v}}$$

Los vectores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ}\ \ y\ \ \overrightarrow{v} = \overrightarrow{PR}$ son linealmente dependientes cuando sus componentes son proporcionales:

$$\frac{1}{3} = \frac{-1}{-a} = \frac{-a-2}{3-6a} \Rightarrow \underline{\underline{a = 3}}$$

b)

Para determinar la recta r consideramos uno cualquiera de los puntos y uno cualquiera de los vectores para el valor de a obtenido: $P(-1,\ 2,\ 3)$, $\overrightarrow{u} = (1,\ -1,\ -5)$.

Por ejemplo, la expresión por unas ecuaciones continuas de la recta r es:

$$\underline{\underline{r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{-5}}}$$

****

3º) Busque sus extremos relativos y los puntos de corte con los ejes, y haga una representación aproximada de la curva de ecuación $y = x^4 - x^2$. A continuación, calcule el área del recinto limitado por esta curva y el eje de abscisas.

Por tratarse de una función polinómica y par, es continua y derivable en su domino, que es R, y también es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte con los ejes de la curva son los siguientes:

$$Eje\ \ X \ \Rightarrow \ y = 0 \ \Rightarrow \ x^4 - x^2 = x^2\left(x^2 - 1\right) = 0 \ \Rightarrow \ \begin{cases} x_1 = 0 \ \rightarrow \ \underline{\underline{A(0,\ 0)}} \\ x_2 = 1 \ \rightarrow \ \underline{\underline{B(1,\ 0)}} \\ x_3 = -1 \ \rightarrow \ \underline{\underline{C(-1,\ 0)}} \end{cases}$$

Para determinar los extremos relativos de la función recurrimos a las sucesivas derivadas:

$$y' = 4x^3 - 2x \ ;; \ y'' = 12x^2 - 2 \ ;; \ y''' = 24x.$$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto cuando su primera derivada es cero:

$$y' = 4x^3 - 2x = 0 \ ;; \ 2x\left(2x^2 - 1\right) = 0 \ \Rightarrow \ \underline{x_1 = 0} \ ;; \ \underline{x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}} \ \ y \ \ \underline{x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

La condición anterior, que es necesaria, no es suficiente, cumpliéndose que:

La función tiene un máximo relativo para los valores que anulando la primera derivada hacen que la segunda derivada sea negativa y, tiene un mínimo relativo para los valores que anulando la primera derivada hacen que la segunda derivada sea positiva:

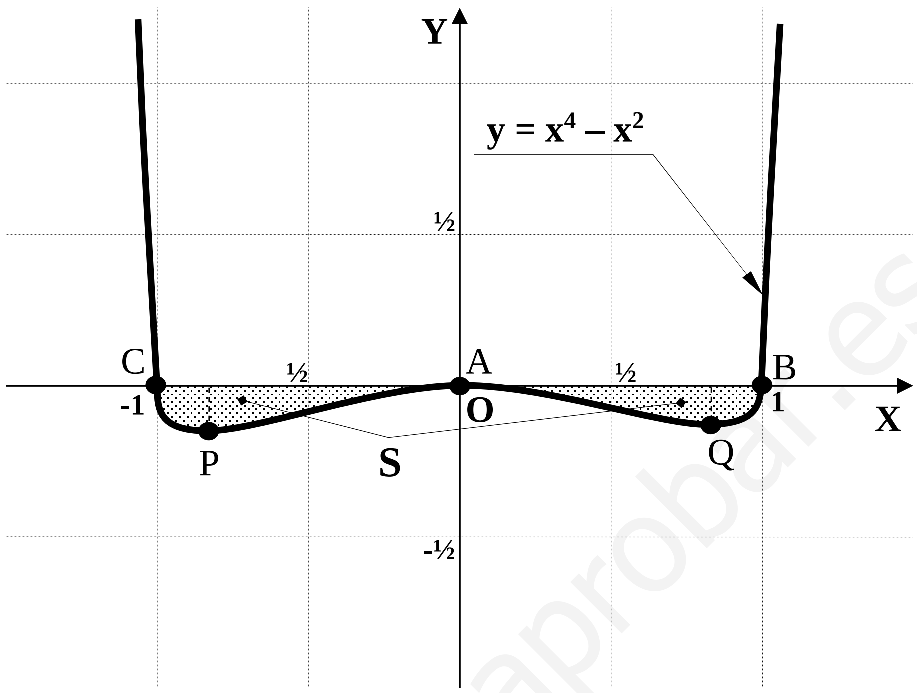
$$y'' = 12x^2 - 2 \ \Rightarrow \ \begin{cases} y''(0) = -2 < 0 \ \Rightarrow \ \underline{Máximo\ \ relativo\ \ para\ \ x = 0} \\ y''\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12 \cdot \frac{2}{4} - 2 = 6 - 2 = 4 > 0 \ \Rightarrow \ \underline{Mínimos\ \ para\ \ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{cases}$$

$$y(0) = 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{Máximo\ \ relativo:\ O(0,\ 0)}}.$$

$$y\left(\pm \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1-4}{16} = -\frac{3}{16} \ \Rightarrow$$ (teniendo en cuenta la simetría)

$$\Rightarrow \textit{Mínimos}: \; \underline{\underline{P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \; -\frac{3}{16}\right) \; y \; Q\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \; -\frac{3}{16}\right)}}$$

La representación gráfica, aproximada, de la curva es la siguiente:



Teniendo en cuenta la simetría de la función, que todas las ordenadas correspondientes a la superficie son negativas, el área pedida es la siguiente:

$$S = -2 \cdot \int_0^1 \left(x^4 - x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \int_1^0 \left(x^4 - x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_1^0 = 2 \cdot \left[0 - \left(\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3}\right)\right] =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{-3+5}{15} = \underline{\underline{\frac{4}{15} \; u^2 = S}}$$

****

4º) Encuentre la ecuación de la recta r contenida en el plano $\pi \equiv x + 2y + 6z - 2 = 0$, que corta a los ejes OY y OZ.

Los puntos de corte del plano $\pi \equiv x + 2y + 6z - 2 = 0$ con ejes OY y OZ son los siguientes:

$$Eje\ \ OY\ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow\ y = 1\ \Rightarrow\ \underline{P(0,\ 1,\ 0)}$$

$$Eje\ \ OZ\ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow\ z = \frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{Q\left(0,\ 0,\ \frac{1}{3}\right)}$$

El vector director de la recta r es cualquier vector $\overrightarrow{v}$ que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w}$ que determinan los puntos P y Q:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \left(0,\ 0,\ \frac{1}{3}\right) - (0,\ 1,\ 0) = \left(0,\ -1,\ \frac{1}{3}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\overrightarrow{v} = (0,\ -3,\ 1)}.$$

Considerando, por ejemplo, el punto P(0, 1, 0), la expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 - 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}}}$$

****

PROBLEMAS

5º) Considere la recta de ecuación $r \equiv x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.

a) Exprese el cuadrado de la distancia de un punto cualquiera A(x, y, z) de la recta r al punto P(1, 2, 5) como una función de la coordenada x.

b) Halle qué valor de x hace mínima esta función, deduzca qué punto Q de la recta es el más próximo a P y calcule la distancia del punto a la recta.

c) Escriba la ecuación de la recta s que pasa por P y Q, y compruebe que el perpendicular a la recta r.

----

a)

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ y un punto genérico de r es de la forma $Q(\lambda,\ 2+2\lambda,\ 1+2\lambda)$. Teniendo en cuenta que $x = \lambda$, el punto A(x, y, z) sería de la forma: $A(x,\ 2+2x,\ 1+2x)$.

El cuadrado de la distancia del punto $A(x,\ 2+2x,\ 1+2x)$ al punto P(1, 2, 5) es el siguiente:

$$f(x) = d^2 = \left(\overline{PQ}\right)^2 = (x-1)^2 + (2+2x-2)^2 + (1+2x-5)^2 = (x-1)^2 + (2x)^2 + (2x-4)^2 =$$

$$= x^2 - 2x + 1 + 4x^2 + 4x^2 - 16x + 16 = 9x^2 - 18x + 17$$

$$\underline{\underline{f(x) = 9x^2 - 18x + 17}}$$

b)

Para que el valor de f(x) sea mínima, la derivada tiene que ser cero:

$$f'(x) = 18x - 18 = 18(x-1) = 0 \ \Rightarrow \ x - 1 = 0 \ ;; \ \underline{\underline{x = 1}}$$

El punto $Q(\lambda,\ 2+2\lambda,\ 1+2\lambda)$ de menor distancia a P es para $\lambda = x = 1$, que es:

$$\underline{\underline{Q(1,\ 4,\ 3)}}$$

Teniendo en cuenta que $f(x) = d^2 = \left(\overline{PQ}\right)^2 = 9x^2 - 18x + 17$, será para x = 1:

$$d_{\overline{PQ}} = \sqrt{9 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 17} = \sqrt{9 - 18 + 17} = \sqrt{8} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ unidades = d_{\overline{PQ}}}}$$

c)

La recta s que pasa por P y Q tiene como vector director a cualquier vector $\overrightarrow{u}$ que sea linealmente dependiente del vector $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ}$:

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (1,\ 4,\ 3) - (1,\ 2,\ 5) = (0,\ 2,\ -2) \Rightarrow \underline{\overrightarrow{u} = (0,\ 1,\ -1)}$$

La expresión de la recta s es por unas ecuaciones paramétricas es (teniendo en cuenta que pasa por P y tiene como vector director a $\overrightarrow{u}$) la siguiente:

$$\underline{\underline{s \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 + \lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}}}$$

El vector director de la recta $r \equiv x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$ es $\overrightarrow{v} = (1,\ 2,\ 2)$.

Para que los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$ sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser cero:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (0,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ 2,\ 2) = 0 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v},\quad c.q.d.}$$

$$\underline{\underline{En\ \ efecto,\ el\ \ segmento\ \ \overline{PQ}\ \ es\ \ perpendicular\ \ a\ \ la\ \ recta\ \ r.}} \quad (c.q.c.)$$

****

6º) Discuta el siguiente sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+py+2z=10 \\ px+6y+3z=12 \end{cases}$ en función del parámetro p. Dé la interpretación geométrica del sistema en cada caso y resuélvalo cuando sea compatible.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & p & 2 \\ p & 6 & 3 \end{pmatrix} \;\; y \;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & p & 2 & 10 \\ p & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro A es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & p & 2 \\ p & 6 & 3 \end{vmatrix}=3p+12+4p-p^2-12-12=-p^2+7p-12=0 \;;;\; p^2-7p+12=0$$

$$p=\frac{7\pm\sqrt{49-46}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{7\pm 1}{2} \Rightarrow \underline{p_1=3} \;;;\; \underline{p_2=4}$$

$$\underline{\underline{Para \;\begin{cases} p\neq 3 \\ p\neq 4 \end{cases} \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M'=3=n^o\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; determinado}}$$

$$\underline{Para\;\; p=3} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 2 & 10 \\ 3 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1=C_3\} \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 10 \\ 3 & 6 & 12 \end{vmatrix}=36+60+60-45-60-48=96-96=3\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; p=3 \Rightarrow Rango\; M \neq Rango\; M' \Rightarrow Incompatible}}$$

$$\underline{Para\;\; p=4} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 10 \\ 4 & 6 & 3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=2F_1\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; p=4 \Rightarrow Rango\; M = Rango\; M'=2<n^o\; incóg. \Rightarrow Compatible\; Indeterminado}}$$

La interpretación geométrica de cada caso es la siguiente:

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} p \neq 3 \\ p \neq 4 \end{cases} los\ \ tres\ \ planos\ \ se\ \ cortan\ \ en\ \ un\ \ punto.}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ p=3 \Rightarrow\ los\ \ planos\ \ 1^o\ \ y\ \ 3^o\ \ son\ \ paralelos\ \ y\ \ secantes\ \ al\ \ 3^o}}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ p=4 \Rightarrow\ los\ \ planos\ \ 1^o\ \ y\ \ 4^o\ \ son\ \ coincidentes\ \ y\ \ secantess\ \ al\ \ 2^o}}$$

Resolvemos para $p \neq 3\ \ y\ \ p \neq 4$ por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 10 & p & 2 \\ 12 & 6 & 3 \end{vmatrix}}{-p^2+7p-12} = \frac{15p+60+48-12p-60-60}{-(p-3)(p-4)} = \frac{3p-12}{-(p-3)(p-4)} = \frac{3(p-4)}{-(p-3)(p-4)} =$$

$$\underline{\underline{= -\frac{3}{p-3} = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 10 & 2 \\ p & 12 & 3 \end{vmatrix}}{-(p-3)(p-4)} = \frac{30+24+10p-10p-24-30}{-(p-3)(p-4)} = \frac{0}{-(p-3)(p-4)} = \underline{\underline{0 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & p & 10 \\ p & 6 & 12 \end{vmatrix}}{-(p-3)(p-4)} = \frac{12p+60+20p-5p^2-60-48}{-(p-3)(p-4)} = \frac{-5p^2+32p-48}{-(p-3)(p-4)} =$$

$$= \frac{5p^2-32p+48}{(p-3)(p-4)} = \frac{5(a-4)(5p-12)}{(p-3)(p-4)} = \underline{\underline{\frac{5(5p-12)}{p-3} = z}} \qquad (*)$$

$$(*)\ \ 5p^2-32p+48=0\ \ ;;\ \ p = \frac{32 \pm \sqrt{1024-960}}{10} = \frac{32 \pm \sqrt{64}}{10} = \frac{32 \pm 8}{10} \Rightarrow \underline{p_1 = 4}\ \ ;;\ \ \underline{p_2 = \frac{12}{5}}$$

$$5p^2-32p+48 = (p-4)\left(p-\frac{12}{5}\right) = \underline{5(p-4)(5p-12)}$$

Resolvemos para p = 4. El sistema resulta: $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 2x+4y+2z=10 \\ 4x+6y+3z=12 \end{cases}$, equivalente al sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ x+2y+z=5 \\ 4x+6y+3z=12 \end{cases}$ y también al sistema $\begin{cases} x+2y+z=5 \\ 4x+6y+3z=12 \end{cases}$.

Parametrizando la variable $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=5-\lambda \\ 4x+6y=12-3\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x-6y=-15+3\lambda \\ 4x+6y=12-3\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x=-3}$$

$-3+2y=5-\lambda$;; $2y=8-\lambda$;; $\underline{y=4-\frac{1}{2}\lambda}$

$$\underline{\underline{Soluci\acute{o}n: \begin{cases} x=-3 \\ y=4-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases},\ \forall\lambda\in R}}$$

****