PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2007

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Las cuestiones valen dos puntos y el problema 4 puntos.

Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos con más prestaciones que las mencionadas.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1ª) Encuentre la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ que pasa por el origen de coordenadas.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas y un vector director de la misma son los siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \;;;\; \underline{y=3-2\lambda} \;;;\; z=1-\lambda-3+2\lambda=\underline{-2+\lambda=z} \Rightarrow$$

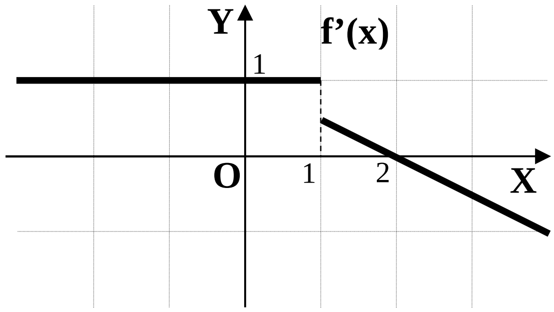
$$\Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=3-2\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases}} \;;;\; \underline{\overrightarrow{v}=(1,\ -2,\ 1)}$$

El plano π tiene como vector normal al vector director de la recta; por otra parte, por pasar por el origen de coordenadas carece de término independiente, por lo cual, su ecuación general es:

$$\underline{\underline{\pi \equiv x-2y+z=0}}$$

****

2ª) La función derivada f'(x) de cierta función continua $f: R \to R$ es una función a trozos formada por las semirrectas del dibujo adjunto.



a) Diga si f(x) es derivable en todos los puntos de R y por qué.

b) Estudie el crecimiento y de crecimiento de f(x).

c) Encuentre si f(x) tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de qué tipo.

d) Sabiendo que f(0) = 1, calcule el valor de f(1).

Justifique todas las respuestas.

----

a)

La función es derivable $\forall x \in R$, excepto para x = 1 porque sus derivadas por la izquierda y por la derecha son diferentes para este valor.

b)

La función es creciente cuando la derivada es positiva y decreciente cuando la derivada es negativa; teniendo en cuenta que la función es continua en R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\underline{Creciente \Rightarrow (-\infty,\ 2)}}\ ;;\ \underline{\underline{Decreciente\ \Rightarrow\ (2,\ +\infty)}}$$

c)

Una función tiene un extremo relativo para los valores que anulan la derivada.

<u>La función f(x) tiene un extremo relativo para x = 2.</u>

Para diferenciar en un extremo relativo si se trata de un máximo o de un mínimo se recurre a la segunda derivada: si la segunda derivada es positiva se trata de un mínimo relativo y si es negativa se trata de un máximo relativo.

Por ser la función f'(x) decreciente para x = 2, su derivada, o sea f''(x) es negativa, por lo cual:

<u>La función f(x) tiene un máximo relativo para x = 2.</u>

d)

La función derivada dada es $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ x \le 1 \\ \dfrac{2-x}{2} & si\ \ x > 1 \end{cases}$, por lo que la función f(x) es la función definida a trozos, que son cada uno de ellos la integral indefinida de los trozos que determinan a la función derivada.

Siendo $\int 1 \cdot dx = x + k$ e $\int \frac{2-x}{2} \cdot dx = \int \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \cdot dx = x - \frac{1}{2}x^2 + C$, la función es de la forma $f(x) = \begin{cases} x + k & si \;\; x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + C & si \;\; x > 1 \end{cases}$, con $k,\ C \in R$.

Teniendo en cuenta que para x = 0 es $f(x) = x + k$ y que el valor de la función es f(0) = 1, tiene que ser $\underline{k = 1}$.

Para determinar el valor de C tenemos en cuenta que f(x) es continua en R, lo cual significa que los límites laterales tienen que ser iguales e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x+1) = \underline{2} = f(1) \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + C\right) = -\frac{1}{2} + 1 + C = \underline{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C = 1 + \frac{1}{2} = \underline{\frac{3}{2} = C}$$

La función es $f(x) = \begin{cases} x + 1 & si \;\; x \le 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} & si \;\; x > 1 \end{cases}$ y $\underline{\underline{f(1) = 2.}}$

****

3ª) Calcule los valores del parámetro a, $a \neq 0$, que hacen que las tangentes a la curva de ecuación $y = ax^4 + 2ax^3 - ax + 1512$ en los puntos de inflexión sean perpendiculares.

Los puntos de inflexión de una función son los valores de x que anulan la segunda derivada:

$$y' = 4ax^3 + 6ax^2 - a \;\; ;; \;\; y'' = 12ax^2 + 12ax = 12ax(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x_1 = 0} \;\; ;; \;\; \underline{x_2 = -1}$$

Sabiendo que la pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto, para los valores obtenidos será:

$$m_1 = y'(0) = \underline{-a = m_1} \;\; ;; \;\; m_2 = y'(-1) = 4a \cdot (-1)^3 + 6a \cdot (-1)^2 - a = -4a + 6a - a = \underline{a = m_2}$$

Teniendo en cuenta que las rectas perpendiculares tienen las pendientes inversas y de signo contrario, tiene que ser:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2} \;\Rightarrow\; -a = -\frac{1}{a} \;\; ;; \;\; a^2 = 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a_1 = 1}} \;\; ;; \;\; \underline{\underline{a_2 = -1}}$$

****

4ª) Halle los puntos de la recta $r \equiv x-1 = y+2 = z$ que equidistan de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv 4x-3z-1=0 \;\; y \;\; \pi_2 \equiv 3x+4y-1=0$.

Los puntos que equidistan de los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ son los planos $\pi \;\; y \;\; \pi'$, bisectores de los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$.

La distancia de un punto $P_0(x_0,\; y_0,\; z_0)$ a un plano $\alpha \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dado por la fórmula: $d(P_0,\; \alpha) = \dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Considerando un punto genérico P(x, y, z) que equidista de los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ y aplicando la fórmula queda:

$$d(P,\; \pi_1) = d(P,\; \pi_2) \Rightarrow \frac{|4x-3z-1|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} \;\; ;; \;\; \frac{|4x-3z-1|}{\sqrt{25}} = \frac{|3x+4y-1|}{\sqrt{25}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |4x-3z-1| = |3x+4y-1|.$$

Considerando signos iguales y diferentes se obtienen los planos $\pi \;\; y \;\; \pi'$:

$$\pi \;\; \Rightarrow \;\; 4x-3z-1 = 3x+4y-1 \;\Rightarrow\; \underline{\pi \equiv x-4y-3z=0}$$

$$\pi' \;\; \Rightarrow \;\; 4x-3z-1 = -3x-4y+1 \;\Rightarrow\; \underline{\pi' \equiv 7x+4y-3z-2=0}$$

La recta $r \equiv x-1 = y+2 = z$ expresada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$ y sus puntos genéricos son de la forma $P(1+\lambda,\;\; -2+\lambda,\;\; \lambda)$.

Los puntos pedidos son las intersecciones de la recta r con los planos $\pi \;\; y \;\; \pi'$:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv x-4y-3z=0 \\ \\ P(1+\lambda,\; -2+\lambda,\; \lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow (1+\lambda)-4(-2+\lambda)-3\lambda = 0 \;\; ;; \;\; 1+\lambda+8-4\lambda-3\lambda=0 \;\; ;; \; 9=6\lambda \;\; ;;$$

$$\lambda_1 = \frac{9}{6} = \underline{\frac{3}{2} = \lambda_1} \;\; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \\ y = -2 + \lambda = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{A\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi' \equiv 7x + 4y - 3z - 2 = 0 \\ \\ P(1+\lambda,\ -2+\lambda,\ \lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow 7(1+\lambda) + 4(-2+\lambda) - 3\lambda - 2 = 0 \ ;;\ 7 + 7\lambda - 8 + 4\lambda - 3\lambda - 2 = 0$$

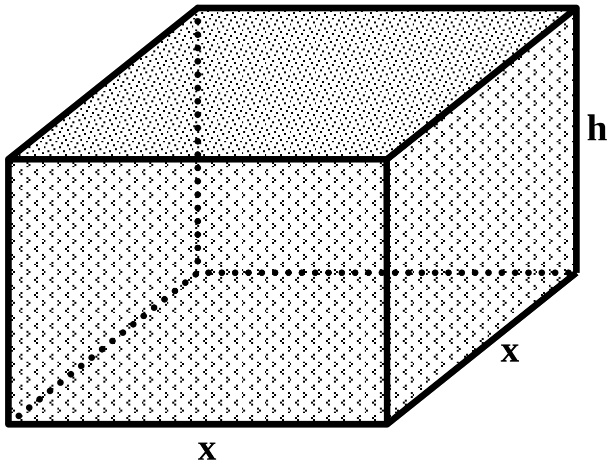
$$8\lambda = 3 \ ;;\ \underline{\lambda_2 = \frac{3}{8}} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + \lambda = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8} \\ y = -2 + \lambda = -2 + \frac{3}{8} = -\frac{13}{8} \\ z = \lambda = \frac{3}{8} \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{B\left(\frac{11}{8},\ -\frac{13}{8},\ \frac{3}{8}\right)}}$$

****

PROBLEMAS

1º) Un almacén tiene forma de prisma recto de base cuadrada y un volumen de 768 m^3. Se sabe que la pérdida de calor a través de las paredes laterales vale 100 unidades por m^2, mientras que a través del techo es de 300 unidades por m^2. La pérdida por el suelo es muy pequeña y se puede considerar nula. Calcule las dimensiones del almacén para que la pérdida de calor sea mínima.



Sean las dimensiones del almacén las indicadas en el dibujo adjunto.

La relación que existe entre las dimensiones del lado de la base y la altura pueden relacionarse a partir del volumen:

$$V = x^2 \cdot h = 768 \;\Rightarrow\; \underline{h = \frac{768}{x^2}}$$

La pérdida total de calor es la siguiente:

$$P = 4 \cdot (x \cdot h) \cdot 100 + x^2 \cdot 300 = \underline{400xh + 300x^2 = P}\,.$$

Sustituyendo el valor obtenido de h en la expresión de P, resulta:

$$P = 400x \cdot \frac{768}{x^2} + 300x^2 = 300x^2 + 307200 \cdot \frac{1}{x}\,.$$

Para que la pérdida de calor sea mínima tiene que ser cero su derivada:

$$P' = 600x - 307200 \cdot \frac{1}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; 600x = \frac{307200}{x^2} \;;;\; x^3 = \frac{307200}{600} = \frac{3072}{6} = 512$$

$$x = \sqrt[3]{512} = \underline{\underline{8\ metros = x}} \qquad\qquad h = \frac{768}{x^2} = \frac{768}{8^2} = \frac{768}{64} = \underline{\underline{12\ \ metros = h}}$$

Para justificar que se trata de un mínimo tenemos que demostrar que la segunda derivada es positiva para el valor de x = 8:

$$P'' = x + 307200 \cdot \frac{2}{x^3} \;\Rightarrow\; \underline{P''(8) > 0,\ \ c.q.j.}$$

****

2º) En el espacio se consideran los planos: $\pi_1 \equiv x+2y+z=1=0$, $\pi_2 \equiv px+y+pz=1$ y $\pi_3 \equiv px+y+2z=1$.

a) Averigüe para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto. Halle este punto cuando p = 1.

b) ¿Hay algún valor de p que hace que la intersección común sea una recta? Si es así, escriba la ecuación vectorial de esta recta.

c) Encuentre cuál es la posición relativa de los tres planos cuando p = ½.

----

a)

Para que exista un punto perteneciente a los tres planos es necesario que el sistema que forman sea compatible determinado y, la solución del sistema son las coordenadas del punto de corte.

El sistema formado por los tres planos es $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ px+y+pz=1 \\ px+y+2z=1 \end{array}\right\}$ y las matrices de coeficientes y ampliada son $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ p & 1 & p & 1 \\ p & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible determinado los rangos de M y M' tienen que ser ambos tres:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+p+2p^2-p-p-4p=2p^2-5p+2=0$$

$$p=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow \underline{p_1=2} \;;;\; \underline{p_1=\frac{1}{2}}$$

$$\underline{\underline{\textit{Los planos } \pi_1,\ \pi_2 \ \textit{y} \ \pi_3 \ \textit{tienen un punto en común } \forall p \in R,\ \left\{p \neq 2,\ p \neq \frac{1}{2}\right\}.}}$$

Para p = 1 el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\}$ y $|M|=2-5+2=-1$.

Para determinar el punto de corte resolvemos el sistema por Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{2+1+2-1-1-4}{-1}=\frac{-1}{-1}=\underline{1=x}\quad ;;\quad y=\frac{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}}{-1}=\underline{0=y}\quad ;;$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}}{-1}=\underline{0=z}\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{P(1,\ 0,\ 0)}}$$

****

OPCIÓN B

CUESTIONES

1ª) Considere la función definida por $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$. Calcule cuánto vale la pendiente de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 0. Averigüe si hay otros puntos en los que la pendiente de la tangente sea igual a la obtenida.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

Para x = 0 el punto de tangencia es $f(0)=\frac{0^2+1}{0+1}=1 \;\Rightarrow\; \underline{P(0,\ 1)}$.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot(x+1)-(x^2+1)\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}=\underline{\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=f'(x)}$$

El valor de la pendiente es: $m=f'(0)=\frac{-1}{1^2}=\underline{-1=m}$.

Sabiendo que la ecuación de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y-y_0=m(x-x_0)$, la tangente es:

$$y-1=-1(x-0)=-x \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{t\equiv x+y-1=0}}$$

Si hay otras rectas tangentes con la misma pendiente tiene que ser $\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1$

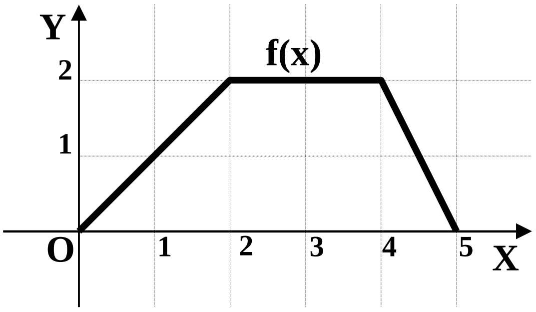
$$x^2+2x-1=-(x+1)^2 \;\;;;\;\; x^2+2x-1=-x^2-2x-1 \;\;;;\;\; 2x^2+4x=0 \;\;;;\;\; 2x(x+2)=0 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=-2 \end{cases} \Rightarrow$ En efecto: para x = -2 la pendiente a la función es también m = -1.

El otro punto de tangencia es $f(-2)=\frac{4+1}{-2+1}=-5 \;\Rightarrow\; \underline{Q(-2,\ -5)}$

****

2ª) Considere la función $y = f(x)$ definida para $x \in [0,\ 5]$ que aparece dibujada en la figura adjunta.



a) ¿Cuál es la expresión de su función derivada cuando existe?

b) Calcule $\int_0^3 f(x) \cdot dx$.

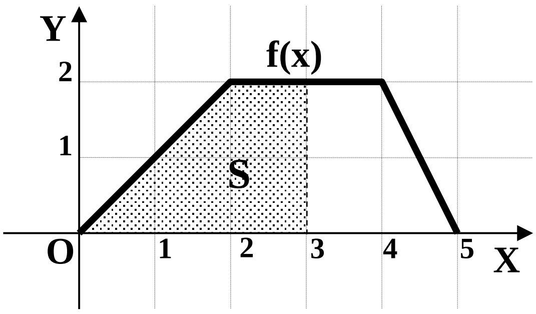
----

a)

La función de la figura es $f(x) = \begin{cases} x & si\ \ 0 \le x < 2 \\ 2 & si\ \ 2 \le x < 4 \\ -\frac{x}{2} & si\ \ 4 \le x \le 5 \end{cases}$.

La función derivada de f(x) es $f'(x) = \begin{cases} 1 & si\ \ 0 \le x < 2 \\ 0 & si\ \ 2 \le x < 4 \\ -\frac{1}{2} & si\ \ 4 \le x \le 5 \end{cases}$

b)



$$S = \int_0^3 f(x) \cdot dx = \int_0^2 x \cdot dx + \int_2^3 2 \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 + [2x]_2^3 = \frac{2^2}{2} - 0 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 =$$

$$= 2 + 6 - 4 = \underline{\underline{4\ u^2}} = S$$

****

3ª) Determine la ecuación del plano π perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que pasa por el punto P(1, 1, 2). ¿Qué distancia separa este punto del origen de coordenadas?

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas y un vector director de la misma son los siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \;\;;;\;\; \underline{x = -2 - \lambda} \;\;;;\;\; y = x - 1 = -2 - \lambda - 1 = \underline{-3 - \lambda = y} \;\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\; \underline{r \equiv \begin{cases} x = -2 - \lambda \\ y = -3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}} \;\;;;\;\; \underline{\overrightarrow{v} = (-1,\; -1,\; 1)}$$

El plano π, por ser perpendicular a r, tiene como vector normal al vector director de la recta, por lo cual, su ecuación general es de la forma $\pi \equiv -x - y + z + D = 0$.

Como el plano π contiene al punto P(1, 1, 2) tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -x - y + z + D = 0 \\ P(1,\; 1,\; 2) \end{array}\right\} \Rightarrow -1 - 1 + 2 + D = 0 \;\;;;\;\; \underline{D = 0}.$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x + y - z = 0}}$$

El plano π carece de término independiente por lo cual pasa por el origen de coordenadas.

<u>La distancia del plano al origen es cero.</u>

****

4ª) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{pmatrix}$. Determine los valores de m para los que el rango de la matriz A es menor que 3. ¿Puede ser Rang A = 1 para algún valor de m?

$$Rang \quad |A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -m \\ 0 & m & 3 \end{vmatrix}=3-4m+m^2=m^2-4m+3=0\,.$$

$$m=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot 3}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}\Rightarrow \underline{m_1=3}\ ;;\ \underline{m_2=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \begin{Bmatrix} m=1 \\ m=2 \end{Bmatrix}\Rightarrow El\ \ rango\ \ de\ \ A\ \ es\ \ menor\ \ que\ \ 3.}}$$

La matriz A tiene como menor complementario del elemento a_{33} al determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$, cuyo rango es distinto dos, por lo cual:

<u>El rango de A no puede ser 1 para cualquier valor real de m.</u>

****

PROBLEMAS

1º) Dada la función $f(x)=e^{-x^2+2x}$.

a) Encuentre su dominio y las posibles intersecciones con los ejes.

b) Encuentre los intervalos donde crece y decrece y los extremos relativos.

c) Encuentre sus posibles asíntotas

d) Haga la representación gráfica aproximada de la función.

----

a)

Se trata de una función exponencial que está definida para cualquier valor real de x, por lo tanto: $\underline{\underline{D(f)\Rightarrow R}}$.

Para x = 0 resulta $f(0)=e^0=1$, por lo que corta el eje Y en el punto A(0, 1).

Por ser $f(x)=e^{-x^2+2x}>0,\ \forall x\in R$, la función no corta a X.

b)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a la función derivada:

$$f'(x)=(-2x+2)\cdot e^{-x^2+2x}=0\ \Rightarrow\ -2x+2=0\ ;;\ \underline{x=1}.$$

$$Para\ \ x<1\ \Rightarrow\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Creciente\ \ en\ \ (-\infty,\ 1)}}$$

$$Para\ \ x>1\ \Rightarrow\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Decreciente\ \ en\ \ (1,\ +\infty)}}$$

Para determinar si existe un máximo o un mínimo para x = 1 recurrimos a la segunda derivada:

$$f''(x)=-2\cdot e^{-x^2+2x}+(-2x+2)^2\cdot e^{-x^2+2x}=e^{-x^2+2x}(-2-2x+2)=\underline{-2x\cdot e^{-x^2+2x}=f''(x)}$$

$$f''(1)=-2\cdot 1\cdot e^{-1+2}=-2e<0\ \Rightarrow\ \underline{M\acute{a}ximo\ \ (absoluto)\ \ para\ \ x=1}$$

$$f(1)=e^{-1+2}=2\ \Rightarrow\ \underline{\underline{M\acute{a}ximo:\ B(1,\ e)}}$$

c)

Por tratarse de una función exponencial carece de asíntotas verticales y oblicuas.

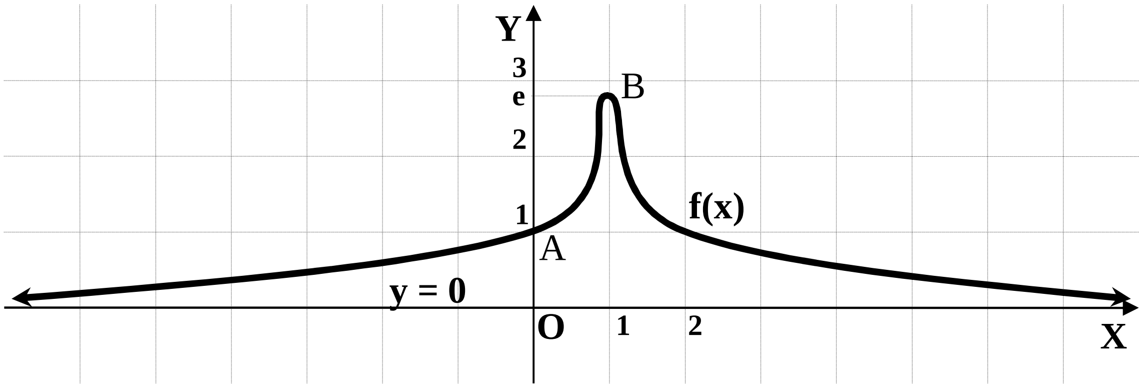
Las posibles asíntotas horizontales son los valores de los límites de la función cuando x tiende a más infinito y a menos infinito:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} e^{-x^2+2x} = e^{-\infty} = 0$$

<u>El eje X es asíntota horizontal de la función.</u>

d)

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



****

2º) Considere la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + az + 2 = 0$, donde a es un parámetro.

a) Encuentre un vector director de la recta y un vector perpendicular al plano.

b) ¿Cuál tiene que ser el valor de a para que la recta y el plano sean paralelos?

c) Averigüe si existen valores de a para los que la recta y el plano sean perpendiculares. En caso afirmativo, calcúlelos.

d) Averigüe si existen valores de a para los que la recta y el plano formen un ángulo de 30º. En caso afirmativo, calcúlelos.

----

a)

Un vector perpendicular al plano π es $\underline{\underline{\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ a)}}$.

Para encontrar un vector director de la recta r la expresamos por unas ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \ ;; \ \left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 3 + \lambda \\ x - 3y = 2 + \lambda \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} 2x - 5y = 3 + \lambda \\ -2x + 6y = -4 - 2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y = -1 - \lambda}$$

$$x - 3y - z - 2 = 0 \ ;; \ x = 3y + \lambda + 2 = -3 - 3\lambda + \lambda + 2 = \underline{-1 - 2\lambda = x} \ \Rightarrow \ r \equiv \begin{cases} x = -1 - 2\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un vector director de r es $\underline{\underline{\overrightarrow{v} = (-2,\ -1,\ 1)}}$.

b)

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares es necesario que el vector director de la recta y el vector normal del plano sean perpendiculares, o sea, que su producto escalar sea cero:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = (2,\ -1,\ a) \cdot (-2,\ -1,\ 1) = 0 \ ;; \ -4 + 1 + a = 0 \ ;; \ \underline{\underline{a = 3}}$$

c)

Para que la recta r y el plano π sean paralelos, el vector director de la recta y el vector normal del plano tienen que ser paralelos, o sea, que sus componentes han de ser proporcionales: $\frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1} = \frac{a}{1} \Rightarrow$

<u>No existe ningún valor real de a para que la recta y el plano sean paralelos.</u>

d)

La recta r y el plano π formaran un ángulo de 30º cuando el vector director de la recta y el vector normal del plano formen un ángulo de 60º.

Aplicando la fórmula del producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{n}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos 60º \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;(2,\ -1,\ a) \cdot (-2,\ -1,\ 1) = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + a^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \frac{1}{2} \;;;$$

$$-4 + 1 + a = \sqrt{4 + 1 + a^2} \cdot \sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \frac{1}{2} \;;;\; 2 \cdot (a - 3) = \sqrt{a^2 + 5} \cdot \sqrt{6} \;;;$$

$$4 \cdot (a-3)^2 = 6 \cdot \left(a^2 + 5\right) \;;;\; 2 \cdot \left(a^2 - 6a + 9\right) = 3a^2 + 15 \;;;\; 2a^2 - 12a + 18 = 3a^2 + 15 \;;;$$

$$a^2 + 12a - 3 = 0 \;;;\; a = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 12}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{156}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{4 \cdot 39}}{2} = \frac{-12 \pm 2\sqrt{39}}{2} =$$

$$= -6 \pm \sqrt{39} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{a_1 = -6 + \sqrt{39}}} \;;;\; \underline{\underline{a_2 = -6 - \sqrt{39}}}$$

****