PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.

Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1ª) Considera la función $f(x)=ax^2+x+b,\ (a,\ b\notin R)$. Calcula los valores de a y b que hacer que la recta y = 2x + 1 sea tangente a la gráfica de f(x) cuando x = 1.

La pendiente de la recta es m = 2 y el punto de tangencia es P(1, 3).

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x)=2ax+1 \;\Rightarrow\; f'(1)=m=2 \;\Rightarrow\; f'(1)=2a+1=2 \;;;\; 2a=1 \;;;\; \underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}.$$

El punto de tangencia, lógicamente, pertenece a la función y a la recta, por lo tanto tiene que ser $f(1)=3$:

$$f(1)=\frac{1}{2}\cdot 1^2+1+b=3 \;;;\; \frac{1}{2}+1+b=3 \;;;\; 1+2+2b=6 \;;;\; 2b=3 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{b=\frac{3}{2}}}$$

****

2ª) Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Calcule A^2 y A^3.

b) Determine razonadamente el valor de A^{60124}.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^2}}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A^3 = -I}}$$

b)

Teniendo en cuenta el apartado anterior resulta:

$$A^4 = A^3 \cdot A = -I \cdot A = \underline{-A = A^4} \quad ;; \quad A^5 = A^4 \cdot A = -A \cdot A = \underline{-A^2 = A^5}$$

$$A^6 = A^5 \cdot A = -A^2 \cdot A = -A^3 = \underline{I = A^6}.$$

Teniendo en cuenta que :

$$\begin{array}{l|l} 60124 & 6 \\ \hline 0012 & 10020 \\ \quad 0\mathbf{4} & \end{array}$$

El valor de A^{60124} es equivalente a A^4, por lo tanto:

$$\underline{\underline{A^{60124} = A^4 = -A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}}$$

****

3ª) Considera un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.

a) ¿Puede ser incompatible?

b) ¿Puede ser compatible determinado? Razonar las respuestas.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada de un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas tienen por dimensión 2 x 3 y 2 x 4, respectivamente. Puede ocurrir que los rangos sean los dos iguales a dos en cuyo caso el sistema es compatible indeterminado, pero también puede ocurrir que el rango de la matriz de coeficientes sea uno y el rango de la matriz ampliada sea dos, como por ejemplo el sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$; en conclusión y teniendo en cuenta el Teorema de Rouché-Fröbenius:

<u>Un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas puede ser incompatible.</u>

b) ¿Puede ser compatible determinado? Razonar las respuestas.

Para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible determinado, según el mencionado Teorema de Rouché-Fröbenius, es necesario que los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada sean iguales e igual al número de incógnitas y, como en el caso que nos ocupa el mayor rango posible de ambas matrices es dos y el número de incógnitas es tres, se deduce que:

<u>Un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas no puede ser compatible determinado.</u>

****

4ª) Dados el punto P(7, 5, 1), el plano $\pi \equiv x-2y-3z=10$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2z=7 \\ x-6y-2z=5 \end{cases}$:

a) Halla la distancia del punto P al plano π.

b) Halla la distancia del punto P a la recta r.

c) Halla la distancia de la recta r al plano π.

----

a)

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi)=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv x-2z-3z-10=0$ y al punto P(7, 5, 2):

$$d(P,\ \pi)=\frac{|1\cdot 7-2\cdot 5-3\cdot 2-10|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}}=\frac{|7-10-6-10|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{|-19|}{\sqrt{14}}=\frac{19}{\sqrt{14}}=\underline{\underline{\frac{19\sqrt{14}}{14}\ unidades=d(P,\ \pi)}}$$

b)

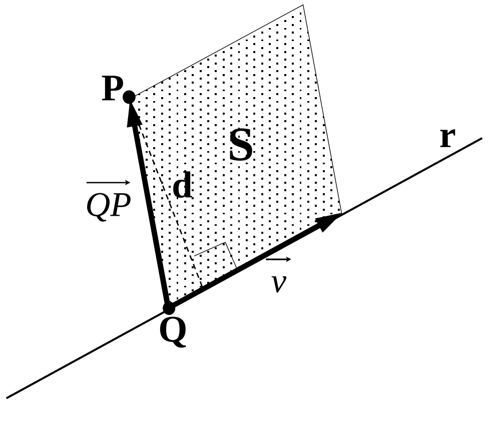
La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 3x-2y+2z=7 \\ x-6y-2z=5 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y=7-2\lambda \\ x-6y=5+2\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 9x-6y=21-6\lambda \\ -x+6y=-5-2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 8x=16-8\lambda\ ;;$$

$$\underline{x=2-\lambda}\ ;;\ 3x-2y=7-2\lambda\ ;;\ 6-3\lambda-2y=7-2\lambda\ ;;\ 2y=-1-\lambda\ ;;\ \underline{y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\lambda \\ z=\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $(\lambda=1)$: $Q(1,\ -1,\ 1)$ y $\overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ -2)$



Teniendo en cuenta que $S=d\cdot\left|\overrightarrow{v}\right|$ y que también puede ser $S=\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|$, se deduce que la distancia es: $d(P,\ r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{QP}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$.

$$\overrightarrow{QP}=P-Q=(7,\ 5,\ 1)-(1,\ -1,\ 1)=\underline{(6,\ 6,\ 0)=\overrightarrow{QP}}$$

$$d(P,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QP}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 6 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{6\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{matrix}\right\|}{\sqrt{9}}=\frac{6\cdot\left|-2i+k-2k+2j\right|}{3}=$$

$$=2\cdot\left|-2i+2j-k\right|=2\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+(-1)^2}=2\cdot\sqrt{4+4+1}=2\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=\underline{\underline{6\ u=d(P,\ r)}}$$

c)

El vector director de la recta, $\overrightarrow{v}=(2,\ 1,\ -2)$, y el vector normal del plano π, que es $\overrightarrow{n}=(1,\ -2,\ -3)$, son oblicuos por no ser paralelos, $\left(\frac{2}{1}\neq\frac{1}{-2}\neq\frac{-2}{-3}\right)$, ni perpendiculares, $\left[\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{n}=(2,\ 1,\ -2)\cdot(1,\ -2,\ -3)=2-2+6=6\neq 0\right]$, por lo cual la recta r y el plano π se cortan en un punto y, en consecuencia:

$$\underline{\underline{d(r,\ \pi)=0}}$$

****

PROBLEMAS

1º) Dadas las funciones $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ y $g(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$:

a) Compruebe que $[g(x)]^2-[f(x)]^2=1$.

b) Compruebe también que $f'(x)=g(x)$ y $g'(x)=f(x)$.

c) Compruebe que $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)$.

d) Calcule $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ dividiendo por e^x el numerador y denominador; con un procedimiento similar (pero no igual), calcule $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

----

a)

$$[g(x)]^2-[f(x)]^2=1\ \Rightarrow\ \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1\ ;;\ \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{4}-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{4}=1\ ;;$$

$$\left(e^x+e^{-x}\right)^2-\left(e^x-e^{-x}\right)^2=4\ ;;\ \left[\left(e^x+e^{-x}\right)+\left(e^x-e^{-x}\right)\right]\cdot\left[\left(e^x+e^{-x}\right)-\left(e^x-e^{-x}\right)\right]=4\ ;;$$

$$\left(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x}\right)\cdot\left(e^x+e^{-x}-e^x+e^{-x}\right)=4\ ;;\ \left(2e^x\right)\cdot\left(2e^{-x}\right)=4\ ;;\ 4\cdot e^0=4\ ;;\ \underline{4=4}\ \Rightarrow$$

$$En\ \ efecto:\ \underline{\underline{[g(x)]^2-[f(x)]^2=1,\ \ c.q.c.}}$$

b)

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{f'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=g(x)}}$$

$$g(x)=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)\ \Rightarrow\ \underline{\underline{g'(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)=f(x)}}$$

c)

Tenemos que comprobar que $f(x+y)=f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)$:

$$f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}=$$

$$=\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)\left(e^y+e^{-y}\right)}{4}+\frac{\left(e^y-e^{-y}\right)\left(e^x+e^{-x}\right)}{4}=\frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}+e^{x+y}+e^{-x+y}-e^{x-y}-e^{-x-y}}{4}=$$

$$= \frac{2e^{x+y} - 2e^{-x-y}}{4} = \underline{\underline{\frac{2e^{x+y} - 2e^{-(x+y)}}{4}}} = f(x+y) \qquad \underline{\underline{c.q.c.}}$$

d)

$$\underset{x\to\infty}{lím} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^\infty - e^{-\infty}}{e^\infty + e^{-\infty}} = \frac{\infty - 0}{\infty + 0} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{x\to\infty}{lím} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x}}{\frac{e^x + e^{-x}}{e^x}} = \underset{x\to\infty}{lím} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1-0}{1+0} = \underline{\underline{1}}$$

$$\underset{x\to-\infty}{lím} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to-\infty}{lím} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \underset{x\to-\infty}{lím} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-\infty} - e^{+\infty}}{e^{-\infty} + e^{+\infty}} = \frac{0 - \infty}{0 + \infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow In\det. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{x\to-\infty}{lím} \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \underset{x\to-\infty}{lím} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{-\infty} - 1}{e^{-\infty} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = \underline{\underline{-1}}$$

****

2º) Las rectas $r_1 \equiv \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ y $r_2 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}$ son coplanarias (es decir, están contenidas en un mismo plano).

a) Explique, razonadamente, cual es la posición relativa de estas rectas.

b) Encuentre la relación entre los parámetros a y b.

c) Encuentre los valores de a y b si el plano π que las contiene pasa por P(2, 4, 6).

----

a)

Los vectores directores de las rectas son $\overrightarrow{v_1} = (2,\ 1,\ 4)$ y $\overrightarrow{v_2} = (1,\ 2,\ -1)$, que son linealmente independiente y, por ser coplanarias y ser nulo el producto escalar de los vectores directores: $\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (2,\ 1,\ 4) \cdot (1,\ 2,\ -1) = 2 + 2 - 4 = 0$:

<u>Las rectas r_1 y r_2 son secantes y, en particular, son perpendiculares.</u>

b)

Un punto de cada una de las rectas son $P_1(a, 0, -1)$ y $P_2(-2, b, 4)$ y el vector que determinan es $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-2,\ b,\ 4) - (a,\ 0,\ -1) = \underline{(-2-a,\ b,\ 5) = \overrightarrow{w}}$.

Por ser las rectas coplanarias, los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\}$ tienen que ser linealmente dependientes, es decir, su rango tiene que ser dos y, como consecuencia, el determinante que forman tiene que valer cero:

$$Rango\ \{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2-a & b & 5 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 20 + 4b + 2 + a + 16 + 8a + 2b - 5 = 0 \ ;;$$

$$6b + 9a + 33 = 0 \ ;;\ 2b + 3a + 11 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{3a + 2b = -11}}$$

c)

La ecuación general del plano π puede obtenerse por los vectores directores de las rectas y el punto P(2, 4, 6):

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2}) \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;$$

$$-(x-2) + 4(z-6) + 4(y-4) - (z-6) - 8(x-2) + 2(y-4) = 0 \ ;;\ -9(x-2) + 6(y-4) + 3(z-6) = 0 \ ;;$$

$$3(x-2) - 2(y-4) - (z-6) = 0 \ ;;\ 3x - 6 - 2y + 8 - z + 6 = 0 \ ;;\ \underline{\pi \equiv 3x - 2y - z + 8 = 0}$$

Como los puntos $P_1(a, 0, -1)$ y $P_2(-2, b, 4)$ pertenecen al plano, tienen que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 3x - 2y - z + 8 = 0 \\ P_1(a,\ 0,\ -1)\end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot a - 2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) + 8 = 0 \ ;;\ 3a + 0 + 1 + 8 = 0 \ ;;\ 3a = -9 \ ;;\ \underline{\underline{a = -3}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv 3x - 2y - z + 8 = 0 \\ P_2(-2,\ b,\ 4)\end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot (-2) - 2 \cdot b - 1 \cdot 4 + 8 = 0 \ ;;\ -6 - 2b - 4 + 8 = 0 \ ;;\ 2b = -2 \ ;;\ \underline{\underline{b = -1}}$$

****

OPCIÓN B

CUESTIONES

1ª) Halle los valores de los parámetros a y b para que la función f(x) sea continua y derivable para x = 2, siendo $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & si \quad x<2 \\ x^3+bx+5 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$.

Para que la función f(x) sea continua para x = 2 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(ax^2+2x+3\right)=4a+4+3=\underline{4a+7} \\ \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+bx+5\right)=8+2b+5=2b+13=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2).$$

$4a+7=2b+13\ ;;\ 4a-2b=6\ ;;\ \underline{2a-b=3}$ (1)

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+2 & si \quad x<2 \\ \\ 3x^2+b & si \quad x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'\left(2^-\right)=4a+2 \\ \\ f'\left(2^+\right)=12+b \end{cases} \Rightarrow f'\left(2^-\right)=f'\left(2^+\right) \Rightarrow 4a+2=12+b\ ;;$$

$\underline{4a-b=10}$ (2)

Los valores de a y b se obtienen de la resolución del sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{l} 2a-b=3 \\ 4a-b=10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} -2a+b=-3 \\ 4a-b=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a=7\ ;;\ \underline{\underline{a=\frac{7}{2}}}\ ;;\ 2a-b=3\ ;;\ 7-b=3\ ;;\ \underline{\underline{b=4}}$$

****

2ª) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales, se pide:

a) Calcular a y b para que sea $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Según los valores obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

c) Si n es un número natural cualquiera, expresar A^n en función de n.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} (a+b)^2+0 & a+b+a-b \\ 0+0 & 0+(a-b)^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}} \;;;\; \underline{\underline{b=0}}$$

b)

Para a = 1 y b = 0 la matriz resulta ser $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^2}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^3}}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 1+3 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^4}}$$

c)

Del apartado anterior se deduce que $\underline{\underline{A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$

****

3ª) Decir para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = L\left(x^2+1\right)$ es paralela a la *recta* y = x. Escribir la ecuación de esta recta tangente.

La pendiente de la recta y = x es m = 1.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = m = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{x^2+1} = 1 \;\;;;\;\; 2x = x^2+1 \;\;;;\;\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\;;;$$

.

$$(x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x=1}$$

$$\underline{\underline{Para\;\; x=1 \;\; la \;\; recta \;\; \tan gente \;\; a \;\; la \;\; curva \;\; y = L\left(x^2+1\right) \;\; es \;\; paralela \;\; a \;\; la \;\; recta \;\; y = x}}$$

El punto de tangencia es P(1, 1).

Sabiendo que la recta que pasa por un punto conocida la pendiente viene dada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, la tangente pedida es:

$$y - 1 = 1 \cdot (x-1) \;\;;;\;\; y - 1 = x - 1 \;\;;;\;\; \underline{y = x}$$

<u>La recta tangente pedida es, precisamente, la recta dada y = x.</u>

****

4ª) Dados el plano $\pi \equiv 3x-2y+5z=6$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-3}$, hallar su punto de corte, si existe.

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=-2-3\lambda \end{cases}$ y un punto genérico de la misma es $P(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ -2-3\lambda)$.

El punto de corte de r y π, si existe, tiene que pertenecer simultáneamente a ambos, por lo cual:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x-2y+5z=6 \\ P(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ -2-3\lambda) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 3(1+2\lambda)-2(-1+\lambda)+5(-2-3\lambda)=6\ \ ;;$$

$$3+6\lambda+2-2\lambda-10-15\lambda=6\ \ ;;\ \ -5-11\lambda=6\ \ ;;\ \ 11\lambda=-11\ \ ;;\ \ \underline{\lambda=-1}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1+2\lambda,\ -1+\lambda,\ -2-3\lambda) \\ \lambda=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow\ \underline{\underline{P(-1,\ -2,\ 1)}}$$

****

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y-(a-1)z=4 \\ x-2y+z=-4 \\ 4x-(a+1)y+z=-2a \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

c) En el caso del apartado anterior, hallar una solución del sistema en que x, y, z tengan valores enteros.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-a \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -a-1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1-a & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -a-1 & 1 & -2a \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1-a \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -a-1 & 1 \end{vmatrix}=-4+4+(1-a)(-a-1)+8(1-a)-2(-a-1)-1=$$

$$=-a-1+a^2+a+8-8a+2a+2-1=a^2-6a+8=0 \;\;;;$$

$$a=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=3\pm 1 \;\Rightarrow\; \underline{a_1=2} \;\;;;\;\; \underline{a_2=4}$$

$$\underline{Para \; \begin{Bmatrix} a\neq 2 \\ a\neq 4 \end{Bmatrix} \;\Rightarrow\; Rango\; M = Rango\; M' = 3 = n^o \; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\; Determinado}$$

$$Para\;\; \alpha=2 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \{C_4=-4C_3\} \;\Rightarrow\; \underline{Rango\;\; M'=2}$$

$$\underline{Para\;\; a=2 \;\Rightarrow\; Rango\; M = Rango\; M' = 2 < n^o \; incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\; Indeterminado}$$

$$Para\;\; \alpha=4 \;\Rightarrow\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango\;\; M' \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -8 \end{vmatrix} = 32-20-16+32-40+8 = 72-76 \neq 0 \Rightarrow \underline{Rang\ \ M' = 3}$$

$$\underline{Para\ \ a = 4 \Rightarrow Rango\ M = 2\ ;;\ Rango\ M' = 3 \Rightarrow Incompatible}$$

b)

Resolvemos para a = 2, C. I.. El sistema resulta $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 2y + z = -4 \\ 4x - 3y + z = -4 \end{cases}$.

Despreciando una ecuación, por ejemplo la tercera, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $z = \lambda$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + y = 4 + \lambda \\ x - 2y = -4 - \lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 4x + 2y = 8 + 2\lambda \\ x - 2y = -4 - \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 4 + \lambda\ ;;\quad \underline{x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\lambda}\ ;;$$

$$2x + y = 4 + \lambda\ ;;\ y = 4 + \lambda - 2x = 4 + \lambda - \frac{8}{5} - \frac{2}{5}\lambda = \underline{\frac{12}{5} + \frac{3}{5}\lambda = y}$$

$$Solución: \begin{cases} x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\lambda \\ y = \frac{12}{5} + \frac{3}{5}\lambda =\ ;\ \forall \lambda \in R \\ z = \lambda \end{cases}$$

c)

Un caso sencillo sería para $\lambda = 1$, para el cual el sistema tiene como soluciones:

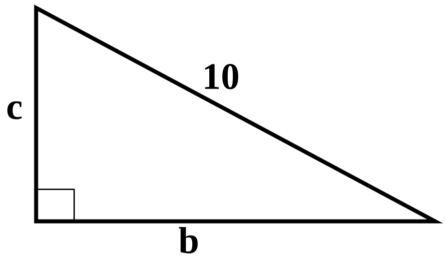
$$\begin{cases} x = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1 \\ y = \frac{12}{5} + \frac{3}{5} = \frac{15}{5} = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad Solución: \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

El caso general de soluciones enteras es para $\underline{\lambda = \dot{5} + 1}$, como por ejemplo:

$$\lambda = 6,\ \lambda = 11,\ \lambda = 16,\ \cdots$$

****

2º) De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 cm, hallar las longitudes de los catetos del triángulo que tiene el perímetro máximo. Comprueba que la solución hallada corresponde realmente al perímetro máximo.



$$b^2+c^2=10^2 \;;;\; \underline{c=\sqrt{100-b^2}} \qquad (*)$$

$$P=b+c+10=b+\sqrt{100-b^2}+10$$

El perímetro será máximo cuando su derivada sea cero:

$$P'=1+\frac{-2b}{2\sqrt{100-b^2}}+0=1-\frac{b}{\sqrt{100-b^2}}=\frac{\sqrt{100-b^2}-b}{\sqrt{100-b^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{100-b^2}-b=0 \;;;\; \sqrt{100-b^2}=b \;;;$$

$$100-b^2=b^2 \;;;\; 100=2b^2 \;;;\; b^2=50 \;;;\; b=\pm\sqrt{50}=\pm5\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{b=5\sqrt{2}\ \ unidades}}$$

Sustituyendo en (*): $c=\sqrt{100-b^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=\underline{5\sqrt{2}\ \ unidades=c}$

$$\underline{\underline{Se\ trata\ de\ un\ triángulo\ rectángulo\ e\ isósceles\ de\ catetos\ 5\sqrt{2}\ unidades}}$$

Justificación de que se trata del perímetro máximo:

$$P''=0-\frac{1\cdot\sqrt{100-b^2}-b\cdot\frac{-2b}{2\cdot\sqrt{100-b^2}}}{\left(\sqrt{100-b^2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{100-b^2}+\frac{2b^2}{\sqrt{100-b^2}}}{100-b^2}=-\frac{100-b^2+2b^2}{\left(100-b^2\right)\cdot\sqrt{100-b^2}}=$$

$$=\underline{\frac{100+b^2}{\left(b^2-100\right)\cdot\sqrt{100-b^2}}=P''}$$

$$P''_{\left(\sqrt{50}\right)}=\frac{100+50}{(50-100)\cdot\sqrt{100-50}}=\frac{150}{-50\cdot\sqrt{50}}=-\frac{3}{\sqrt{50}}<0 \Rightarrow \underline{Máximo,\ c.q.j.}$$

****