PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2008

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a TRES de las cuatro cuestiones y resuelva UNO de los dos problemas. En las respuestas, explique siempre qué hace y por qué.
Puede utilizar calculadora científica para el cálculo de funciones exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y especiales, así como para realizar cálculos estadísticos. No se podrán utilizar calculadoras u otros instrumentos que lleven información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

OPCIÓN A

CUESTIONES

1ª) Se sabe que cierta función derivable F(x) verifica que $F'(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ y F(1) = 3.

a) Calcular F(x).

b) Calcular el área comprendida entre F(x), el eje OX desde x = 0 hasta x = 1.

----

a)

$$F(x)=\int F'(x)\cdot dx+C=\int\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\cdot dx+C=\int x^{-\frac{1}{4}}\cdot dx+C=\frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1}+C=\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C=\underline{\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C=F(x)}.$$

Sabiendo que F(1) = 3 $\Rightarrow$ $\frac{4}{3}\sqrt[4]{1^3}+C=3$;; $\frac{4}{3}+C=3$;; $4+3C=9$;; $3C=5$;; $\underline{C=\frac{5}{3}}$.

$$F(x)=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+\frac{5}{3}=\underline{\underline{\frac{1}{3}\left(4\sqrt[4]{x^3}+5\right)=F(x)}}$$

b)

Por ser todas las ordenadas de la función F(x) positivas $\forall x\in D(F)$, el área pedida es la siguiente:

$$S=\int_0^1 \frac{1}{3}\left(4\sqrt[4]{x^3}+5\right)\cdot dx=\frac{4}{3}\cdot\int_0^1 \sqrt[4]{x^3}\cdot dx+\frac{5}{3}\cdot\int_0^1 dx=\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{x^{\frac{3}{4}+1}}{\frac{3}{4}+1}\right]_0^1+\frac{5}{3}\cdot[x]_0^1=\frac{4}{3}\cdot\left[\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\frac{7}{4}}\right]_0^1+\frac{5}{3}\cdot(1-0)=$$

$$=\frac{16}{21}\cdot\left[x^{\frac{7}{4}}\right]_0^1+\frac{5}{3}=\frac{16}{21}\cdot(1-0)+\frac{5}{3}=\frac{16}{21}+\frac{5}{3}=\frac{16+35}{21}=\frac{51}{21}=\underline{\underline{\frac{17}{7}\,u^2=S}}$$

****

2ª) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Hallar la matriz M, cuadrada de orden 2, tal que M · A = B.

b) Comprobar que $M^2 = I_2$ (matriz identidad de orden 2) i deducir la expresión de M^n.

----

a)

Multiplicando por A^{-1}, por la derecha, los dos términos de la expresión M · A = B, resulta:

$$M \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1} \;\;;;\;\; M \cdot I = B \cdot A^{-1} \;\;;;\;\; \underline{M = B \cdot A^{-1}} \qquad (*)$$

Para hallar la matriz inversa de A utilizamos el método de Gauss-Jordan:

$$(A/I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - 2F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 8 & -2 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to \frac{1}{8}F_2\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + 3F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{array}\right) \Rightarrow \underline{A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix}}$$

Sustituyendo el valor obtenido de A^{-1} en la expresión (*):

$$M = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{3}{8}\\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}-\frac{3}{4} & \frac{3}{8}+\frac{3}{8}\\ \frac{2}{4}+\frac{2}{4} & \frac{6}{8}-\frac{2}{8}\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = M}}$$

b)

$$M^2 = M \cdot M = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}+\frac{3}{4} & -\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2} & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \underline{\underline{I^2 = M,\;\; c.q.d.}}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = I_2 \cdot M = \underline{M = M^3}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = M \cdot M = M^2 = \underline{I_2 = M^4} \;\;\;;; \quad \cdots\cdots\cdots\cdot$$

$$\underline{\underline{M^n = \begin{cases} M \to Si\;\; n\;\; es\;\; impar \\ I_2 \to Si\;\; n\;\; es\;\; par\end{cases}}}$$

****

3ª) Discutir el sistema $\begin{cases} x+y+(m-1)z=1 \\ x+(m-1)y+z=m-1 \\ (m-1)x+y+z=m+2 \end{cases}$ en función de los valores del parámetro m.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & m-1 & 1 \\ 1 & m-1 & 1 & m-1 \\ m-1 & 1 & 1 & m+2 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 1 & m-1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=m-1+m-1+m-1-(m-1)^3-1-1=3m-5-(m-1)^3=$$

$$=3m-5-\left(m^3-3m^2+3m-1\right)=-m^3+3m^2-4=0 \;;;\; m^3-3m^2+4=0$$

Resolviendo por Ruffini:

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
	1	-4	4	$\boxed{0}$
2		2	-4	
	1	-2	$\boxed{0}$	
2		2		
	1	$\boxed{0}$		

Las soluciones diferentes son para m = -1 y m = 2.

$$\underline{\underline{Para\ \begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq 2 \end{cases}\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incóg.\Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ m=-1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_2=C_4\}\Rightarrow \underline{Rango\ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ m=-1\Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=2<n^{o}\ incóg.\Rightarrow Compatible\ Indeterminado}}$$

$$Para\ m=2\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow \underline{Rango\ M=1}$$

$$Para\ \ m=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=2 \Rightarrow Rango\ \ M=1\ \ ;;\ \ Rango\ \ M'=2 \Rightarrow Incompatible}}$$

****

4ª) Halle la ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$, que pasa por el punto del plano P(-1, 3, a).

El vector normal del plano es $\overrightarrow{n} = (2,\ -1,\ 1)$, que también es vector director de la recta r pedida, o sea: $\overrightarrow{v_r} = (2,\ -1,\ 1)$.

El punto P(-1, 3, a), por pertenecer al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0$, tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 2x - y + z + 3 = 0 \\ \\ P(-1,\ 3,\ a) \end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 3 + a + 3 = 0\ ;;\ -2 - 3 + a + 3 = 0\ ;;\ \underline{a = 2}\ \Rightarrow\ \underline{P(-1,\ 3,\ 2)}$$

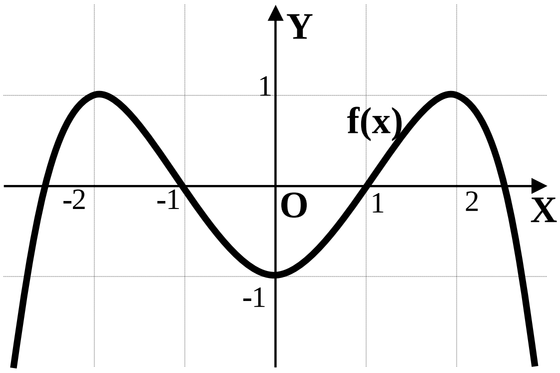
La recta r pedida, dada por unas ecuaciones paramétricas, es:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \quad ,\ \forall \lambda \notin R \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

****

PROBLEMAS

1º) Considera una función f(x) cuya representación gráfica en el intervalo (-3, 3) es la que indica la figura adjunta. Se pide:



a) Determinar las coordenadas de los puntos extremos (máximos y mínimos) relativos.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función en el intervalo (-3, 3).

c) Hacer un esbozo de la gráfica de la derivada de esta función.

d) Sabiendo que la función es de la forma $f(x)=ax^4+bx^2+c$, hallar de que función se trata.

----

a)

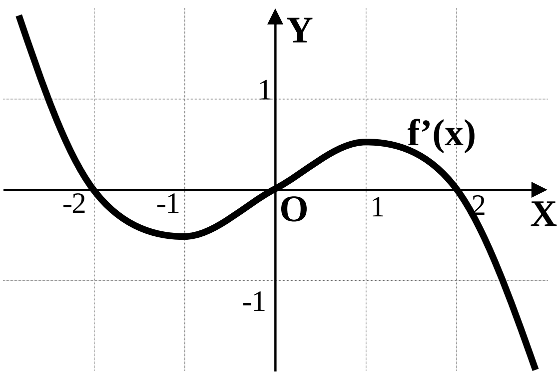
$$\underline{\underline{Máximos:\ \ A(-2,\ 1)\ \ y\ \ B(2,\ 1)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Mínimo:\ \ C(0,\ -1)}}$$

b)

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ \ (-3,\ -2)\cup(0,\ 2)}}\ \ ;;\ \ \underline{\underline{Decrecimiento:\ \ (-2,\ 0)\cup(2,\ 3)}}$$

c)

Teniendo en cuenta que la derivada se anula para los valores x = -2, x = 0 y x = 2 y considerando los periodos de crecimiento y decrecimiento, la representación gráfica, aproximada, de la función derivada es la expresada a continuación:



d)

$$f(x)=ax^4+bx^2+c$$

Por pasar por $A(-2,\ 1)\Rightarrow 1=a\cdot(-2)^4+b\cdot(-2)^2+c\ \ ;;\ \ \underline{16a+4b+c=1}$ (1)

Por pasar por $B(2,\ 1) \Rightarrow 1 = a \cdot 2^4 + b \cdot 2^2 + c$;; $\underline{16a + 4b + c = 1}$ (1)

Por pasar por $C(0,\ -1) \Rightarrow -1 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^2 + c$;; $\underline{c = -1}$

Sustituyendo el valor de c en (1) resulta la ecuación $16a + 4b - 1 = 1$, equivalente a:

$16a + 4b = 2$;; $\underline{8a + 2b = 1}$ (2)

Para disponer de otra ecuación tenemos en cuenta (apartado c) que la derivada se anula, por ejemplo, para x = 2:

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx \Rightarrow f'(2) = 0 \Rightarrow 32a + 4b = 0$;; $\underline{8a + b = 0}$ (3)

Resolviendo el sistema formado por (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{l} 8a + 2b = 1 \\ 8a + b = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 8a + 2b = 1 \\ -8a - b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{b = 1} \ ;;\ 8a + b = 0 \ ;;\ 8a + 1 = 0 \ ;;\ \underline{a = -\frac{1}{8}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{8}x^4 + x^2 - 1}}$$

****

2º) Dadas las rectas $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$, $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$ y el punto P(1, 1, -1), queremos encontrar la ecuación de la recta m que pasa por el punto P y que corta a las rectas r y s. Para conseguirlo:

a) Encuentre la ecuación general o cartesiana del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

b) Encuentre el punto M, intersección del plano π con la recta s.

c) Encuentre la ecuación de la recta t que pasa por los puntos P y M.

d) Compruebe que la recta t es la misma recta m que se busca.

----

a)

Un punto de r es Q(2, -1, 0) y su vector director es $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 2,\ -1)$. El vector que determinan los puntos P y Q es $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = (2,\ -1,\ 0) - (1,\ 1,\ -1) = (1,\ -2,\ 1)$.

La ecuación general del plano π que contiene a la recta r y al punto P es:

$$\pi(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{w}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ 2(x-1) - 2(z+1) - (y-1) - 2(z+1) - 2(x-1) - (y-1) = 0$$

$$-2(y-1) - 4(z+1) = 0 \ ;;\ -2y + 2 - 4z - 4 = 0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv y + 2z + 1 = 0}}$$

b)

La intersección del plano π con la recta s es la solución del sistema formado por ambos.

La expresión de la recta $s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$ por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente: $s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv y + 2z + 1 = 0 \\ s \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -7 + 2\lambda \\ z = -5 + 3\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow -7 + 2\lambda + 2 \cdot (-5 + 3\lambda) + 1 = 0 \ ;;\ -6 + 2\lambda - 10 + 6\lambda = 0 \ ;;\ 8\lambda = 16 \ ;;\ \underline{\lambda = 2}$$

$$M \Rightarrow \left.\begin{cases} x=1+2=3 \\ y=-7+4=-3 \\ z=-5+6=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{M(3,\ -3,\ 1)}}$$

c)

El vector $\overrightarrow{u}$ que determinan los puntos P y M es el siguiente:

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PM} = M - P = (3,\ -3,\ 1) - (1,\ 1,\ -1) = (2,\ -4,\ 2).$$

La ecuación de la recta t que pasa por los puntos P y M es: $\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}}}$.

d)

Tenemos que demostrar que la recta t ≡ m pasa por el punto P(1, 1, -1) y que corta a las rectas r y s:

Evidentemente la recta t contiene al punto P; basta con hacer $\lambda = 0$.

Vamos a comprobar que las rectas t y r se cortan, para lo cual expresamos ambas rectas por ecuaciones implícitas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -x+2=z \\ -y-1=2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x+z=2 \\ y+2z=-1 \end{cases}}$$

$$t \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-4\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x-1=z+1 \\ -2x+2=y-1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{t \equiv \begin{cases} x-z=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}}$$

Para demostrar que las rectas r y t se cortan, el sistema formado por ambas, que es $\begin{cases} x+z=2 \\ y+2z=-1 \\ x-z=2 \\ 2x+y=3 \end{cases}$, tiene que ser compatible determinado.

Las matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Vamos a determinar el rango de M, para lo cual consideramos, en principio, el determinante formado por las tres primeras filas:

$$Rango\ \ M\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M = 3}$$

Vamos a determinar ahora el rango de M’ por el desarrollo de los menores adjuntos de la segunda columna, para lo cual, previamente, restamos a la cuarta fila la segunda:

$$Rango\ \ M'\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4-4+4+4+4-4 = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}$$

$$\underline{Rango\ M = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow\ S.\ C.\ D.}$$

<u>Las rectas r y t se cortan, como cabía esperar.</u>

Ahora vamos a comprobar que las rectas s y t también se cortan, para lo cual expresamos la recta s por unas ecuaciones implícitas:

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x-3 = z+5 \\ 2x-2 = y+7 \end{matrix}\right\} \ \Rightarrow \ \underline{s \equiv \begin{cases} 3x-z=8 \\ 2x-y=9 \end{cases}}$$

Matrices de coeficientes y ampliada: $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\ y\ M' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Vamos a determinar el rango de M, para lo cual consideramos, en principio, el determinante formado por las tres primeras filas:

$$Rango\ \ M\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0 \ \ \Rightarrow \ \underline{Rango\ \ M = 3}$$

Vamos a determinar ahora el rango de M’ por el desarrollo de los menores adjuntos de la segunda columna, para lo cual, previamente, restamos a la tercera fila la primera:

$$Rango\ \ M'\ \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ -2 & 0 & -6 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-18+12+12-6) = 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M' = 3}$$

$$\underline{Rango\ M = Rango\ \ M' = 3 = n^{o}\ \ incóg. \Rightarrow\ S.\ C.\ D.}$$

Las rectas s y t también se cortan, como cabía esperar.

En efecto, las rectas m y t son la misma, como queríamos demostrar.

****

OPCIÓN B

CUESTIONES

1ª) Halle los valores de los parámetros a y b para que la función f(x) sea continua y derivable para x = 2, siendo $f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & si \quad x<2 \\ x^3+bx+5 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$.

La función f(x) es continua para todo R, excepto para el valor x = 2, que es dudosa su continuidad. Para que la función sea continua para x = 2 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e iguales al valor de la función en ese punto:

$$Para \ \ x=2 \Rightarrow \left. \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(ax^2+2x+3\right)=4a+4+3=\underline{4a+7} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(x^3+bx+5\right)=8+2b+5=f(2)=\underline{2b+13} \end{cases} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)} \Rightarrow 4a+7=2b+13 \ ;; \ 4a-2b=6 \ ;; \ \underline{2a-b=3} \qquad (1)$$

La función f(x) es derivable para todo R, excepto para el valor x = 2, que es dudosa su derivabilidad. Para que la función sea derivable para x = 2 tiene que ser derivable por la izquierda y por la derecha y ser ambas derivadas iguales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2ax+2 & si \ \ x<2 \\ 3x^2+b & si \ \ x\geq 2 \end{cases} \Rightarrow \quad f'(2)\Rightarrow \begin{cases} f'\left(2^-\right)=4a+2 \\ f'\left(2^+\right)=12+b \end{cases} \Rightarrow \ f'\left(2^-\right)=f\left(2^+\right) \Rightarrow \ 4a+2=12+b \ ;;$$

$$\underline{4a-b=10} \qquad (2)$$

Los valores de a y b se obtienen de la resolución del sistema que forman (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2a-b=3 \\ 4a-b=10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} -2a+b=-3 \\ 4a-b=10 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 2a=7 \ ;; \ \underline{\underline{a=\frac{7}{2}}} \ ;; \ 2a-b=3 \ ;; \ b=2a-3=7-3=\underline{\underline{4=b}}$$

****

2ª) Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$, siendo a y b números reales, se pide:

a) Calcular a y b para que sea $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Según los valores obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

c) Si n es un número natural cualquiera, expresar A^n en función de n.

----

a)

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} (a+b)^2+0 & a+b+a-b \\ 0+0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a+b)^2=1 \\ 2a=2 \\ (a-b)^2=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{a=1}} \;;;\; \underline{\underline{b=0}}$$

b)

$$Para \begin{Bmatrix} a=1 \\ b=0 \end{Bmatrix} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^3}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0 & 3+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A^4}$$

c)

Del apartado anterior se deduce que:

$$\underline{\underline{A^n=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \forall n\in Z}}$$

****

3ª) Decir para qué valor de x la recta tangente a la curva $y = L\left(x^2+1\right)$ es paralela a la recta y = x. Escribir la ecuación de esta recta tangente.

La tangente a una función en un punto es el valor de la derivada para ese punto.

La recta y = x tiene de pendiente m = 1.

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} = m = 1 \;\Rightarrow\; 2x = x^2+1 \;\;;;\;\; x^2-2x+1=0 \;\;;;\;\; (x-1)^2 = 0 \;\Rightarrow\; \underline{x=1}$$

<u>Para x = 1 la tangente de la curva es paralela a la recta dada.</u>

El punto P de tangencia es el siguiente: $y(1) = L\left(1^2+1\right) = L2 \;\Rightarrow\; \underline{P(1,\; L2)}$.

Sabiendo que la recta que pasa por un punto, conocida la tangente, viene dada por la ecuación $y - y_0 = m(x - x_0)$, la tangente pedida es:

$$y - L2 = 1 \cdot (x-1) = x - 1 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Tangente:\; y = x - 1 + L2}}$$

****

4ª) Dados el plano $\pi \equiv 3x - 2y + 5z = 6$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$, hallar su punto de corte, si existe.

Una forma de hacer este ejercicio es la siguiente (existen otras formas):

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es como sigue:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3x+3 = 2z+4 \\ x-1 = 2y+2 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 3x+2z+1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$$

El sistema que forman el plano y la recta es $\begin{cases} 3x-2y+5z-6=0 \\ 3x+2z+1=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$.

El punto de corte, si existe, es la solución del sistema anterior.

Resolviendo por la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{10-12+24}{-30-4+12} = \frac{22}{-22} = \underline{\underline{-1 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{45+12+5-18}{-22} = \frac{44}{-22} = \underline{\underline{-2 = y}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}}{-22} = \frac{-36+2-6+18}{-22} = \frac{-22}{-22} = \underline{\underline{1 = z}}$$

<u>El punto de corte es P(-1, -2, 1)</u>

<u>Nota</u>: En caso de no haber tenido punto de corte las soluciones de las variables x, y, z no hubieran sido números reales.

****

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x+y-(a-1)z=4 \\ x-2y+z=-4 \\ 4x-(a+1)y+z=-2a \end{cases}$, se pide:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

c) En el caso del apartado anterior, hallar una solución del sistema en que x, y, z tengan valores enteros.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a+1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -a-1 & 1 \end{pmatrix} \;;;\; M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -a+1 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -a-1 & 1 & -2a \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -a+1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -a-1 & 1 \end{vmatrix}=-4+(-a-1)(-a+1)+4+8(-a+1)-2(-a-1)-1=$$

$$=-4+a^2-a+a-1+4-8a+8+2a+2-1=a^2-6a+8=0$$

$$a=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2} \Rightarrow \underline{a_1=4} \;;;\; \underline{a_2=2}$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} a\neq 4 \\ a\neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ M=Rango\ M'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Determinado}}$$

$$Para\ a=4 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 4 & -5 & 1 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow Veamos\ el\ Rango\ de\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ 4 & -5 & -8 \end{vmatrix}=32-20-16+32-40+8=-4\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ M'=3}$$

$$\underline{\underline{Para\ a=4 \Rightarrow Rango\ M=2 \;;;\; Rango\ M'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$Para\ \ a=2\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 1 & -4\\ 4 & -3 & 1 & -4\end{pmatrix}\ \Rightarrow Veamos\ \ el\ \ Rango\ \ de\ \ M'\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\{C_1,\ C_2,\ C_4\}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & -2 & -4\\ 4 & -3 & -4\end{vmatrix}=16-12-16+32-24+4=36-36=0\\ \{C_1,\ C_3,\ C_4\}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 1 & 1 & -4\\ 4 & 1 & -4\end{vmatrix}=-8+4+16-16+8-4=28-28=0\\ \{C_2,\ C_3,\ C_4\}\ \Rightarrow\ \begin{vmatrix}1 & -1 & 4\\ -2 & 1 & -4\\ -3 & 1 & -4\end{vmatrix}=-4-8-12+12+4+8=24-24=0\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{Rango\ \ M'=2}$$

$$\underline{\underline{Para\ \ m=2\ \Rightarrow\ Rango\ \ M=Rango\ \ M'=2<n^o\ \ incóg.\ \Rightarrow\ \ Compatible\ \ Indeterminado}}$$

b)

Resolvemos en el caso de compatible indeterminado, que resulta ser para a = 2; el sistema resulta $\begin{cases}2x+y-z=4\\ x-2y+z=-4\\ 4x-3y+z=-4\end{cases}$. Despreciando la última ecuación y parametrizando una de las incógnitas, sea $\underline{z=\lambda}$: $\left.\begin{array}{r}2x+y=4+\lambda\\ x-2y=-4-\lambda\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4x+2y=8+2\lambda\\ x-2y=-4-\lambda\end{array}\right\}\Rightarrow 5x=4+\lambda\ \ ;;\ \ \underline{x=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\lambda}$.

$$2x+y=4+\lambda\ \ ;;\ \ y=4+\lambda-2x=4+\lambda-\frac{8}{5}-\frac{2}{5}\lambda=\underline{\frac{12}{5}+\frac{3}{5}\lambda=y}$$

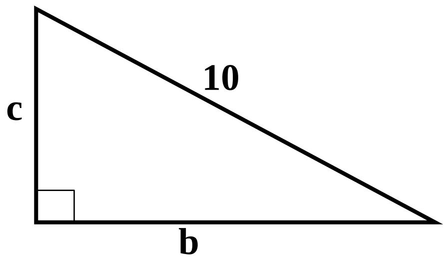
$$\underline{\underline{Solución:\begin{cases}x=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\lambda\\ y=\frac{12}{5}+\frac{3}{5}\lambda,\quad \forall\lambda\notin R\\ z=\lambda\end{cases}}}$$

c)

Para que todas las soluciones sean números enteros, por ser el numerador común 5, una vez encontrado un valor de λ que satisfaga la condición, también serán solución todos los valores de λ que se diferencien cualquier múltiplo entero de 5 del valor encontrado; por ejemplo, para $\lambda=1$ resulta ser x = 1, y = 3, z = 5. También son soluciones los valores $\lambda=6,\ 11,\ \cdots,-4,\ -9,\ \cdots$.

****

2º) De todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 10 cm, hallar las longitudes de los catetos del triángulo que tiene el perímetro máximo. Comprueba que la solución hallada corresponde realmente al perímetro máximo.



$$b^2+c^2=10^2 \;;;\; \underline{c=\sqrt{100-b^2}} \qquad (*)$$

$$P=b+c+10=b+\sqrt{100-b^2}+10$$

El perímetro será máximo cuando su derivada sea cero:

$$P'=1+\frac{-2b}{2\sqrt{100-b^2}}+0=1-\frac{b}{\sqrt{100-b^2}}=\frac{\sqrt{100-b^2}-b}{\sqrt{100-b^2}}=0 \Rightarrow \sqrt{100-b^2}-b=0 \;;;\; \sqrt{100-b^2}=b \;;;$$

$$100-b^2=b^2 \;;;\; 100=2b^2 \;;;\; b^2=50 \;;;\; b=\pm\sqrt{50}=\pm5\sqrt{2} \Rightarrow \underline{\underline{b=5\sqrt{2}\ \ unidades}}$$

Sustituyendo en (*): $c=\sqrt{100-b^2}=\sqrt{100-50}=\sqrt{50}=\underline{5\sqrt{2}\ \ unidades=c}$

$\underline{\underline{\textit{Se trata de un triángulo rectángulo e isósceles de catetos } 5\sqrt{2} \textit{ unidades}}}$

Justificación de que se trata del perímetro máximo:

$$P''=0-\frac{1\cdot\sqrt{100-b^2}-b\cdot\frac{-2b}{2\cdot\sqrt{100-b^2}}}{\left(\sqrt{100-b^2}\right)^2}=-\frac{\sqrt{100-b^2}+\frac{2b^2}{\sqrt{100-b^2}}}{100-b^2}=-\frac{100-b^2+2b^2}{\left(100-b^2\right)\cdot\sqrt{100-b^2}}=$$

$$=\underline{\frac{100+b^2}{\left(b^2-100\right)\cdot\sqrt{100-b^2}}=P''}$$

$$P''_{\left(\sqrt{50}\right)}=\frac{100+50}{\left(50-100\right)\cdot\sqrt{100-50}}=\frac{150}{-50\cdot\sqrt{50}}=-\frac{3}{\sqrt{50}}<0 \Rightarrow \underline{\textit{Máximo, c.q.j.}}$$

****