

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**COMUNIDAD DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2011**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{pmatrix}$:

a) Calcule los valores del parámetro k para los cuales la matriz M no es inversible.

b) Para $k = 0$, calcule M^{-1} .

a)

Una matriz no es inversible cuando su determinante es cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 1 \\ 0 & k-2 & -k \end{vmatrix} = -k(k+1)(k-2) - (k+1)(k-2) = (k+1)(k-2)(-k-1) =$$

$$= -(k+1)^2(k-2) = 0 \Rightarrow \underline{k_1 = -1} ; ; \underline{k_2 = 2}.$$

La matriz M no es inversible para $k = -1$ y $k = 2$.

b)

Para $k = 0$ la matriz es $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Para hallar la inversa utilizamos el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned}(M/I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - F_2 \\ F_3 \rightarrow F_3 + 2F_2 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \{F_3 \rightarrow -F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 - \frac{3}{2}F_3 \\ F_2 \rightarrow F_2 + \frac{1}{2}F_3 \end{array} \right\} &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}}\end{aligned}$$

www.yoquieroaprobar.es

2ª) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$, encuentre la ecuación general (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π perpendicular a la recta por el punto $P(1, 0, -1)$.

Un vector director de $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z = -1 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\vec{n}_1 = (2, -1, 3)$ y $\vec{n}_2 = (1, 0, 1)$.

$$\vec{v}'_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3j + k - 2j = -i + j + k = (-1, 1, 1) \Rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, -1).$$

El haz de planos perpendiculares a r tiene por expresión $\alpha \equiv x - y - z + D = 0$; de los infinitos planos de éste haz, el plano π que contiene al punto $P(1, 0, -1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \equiv x - y - z + D = 0 \\ P(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 - (-1) + D = 0 \quad ; ; \quad 2 + D = 0 \quad ; ; \quad \underline{D = -2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x - y - z - 2 = 0}}$$

3ª) Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$:

a) Encuentre la relación que deben cumplir los parámetros a , b y c para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = -1$.

b) Calcule el valor del parámetro a para que haya un punto de inflexión de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 0$.

c) Encuentre la relación entre los parámetros a , b y c sabiendo que la gráfica de $f(x)$ corta al eje OX en el punto de abscisa $x = -2$.

d) Calcule el valor de los parámetros a , b y c para que se cumplan las tres propiedades dadas anteriores simultáneamente.

a)

Para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un extremo relativo para $x = -1$ es condición necesaria que se anule su derivada para este valor:

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 + 2a \cdot (-1) + b = 0 \quad ; ; \quad 3 - 2a + b = 0.$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ tiene un extremo relativo en } x = -1 \text{ siendo } 2a - b = 3 \text{ y } c \in \mathbb{R}}}$$

b)

La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tiene un punto de inflexión para $x = 0$ cuando se anule su segunda derivada para este valor:

$$f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow 0 + 2a = 0 \quad ; ; \quad \underline{a = 0}.$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ tiene un punto de inflexión en } x = 0 \text{ siendo } a = 0}}$$

c)

Para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ corte al eje OX en $x = -2$ es necesario que sea $f(-2) = 0$:

$$f(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^3 + a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c = 0 \quad ; ; \quad -8 + 4a - 2b + c = 0.$$

$$\underline{\underline{f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ corta al eje OX en } x = -2 \text{ siendo } 4a + 2b + c = 8}}$$

d)

Por cumplirse la propiedad a) sabemos que: $2a - b = 3$. (1)

Por cumplirse la premisa b) sabemos que: $a = 0$. (2)

Por cumplirse la premisa c) sabemos que: $4a + 2b + c = 8$. (3)

Sabiendo que $\alpha = 0$, de la expresión (1) se obtiene que $b = -3$.

Finalmente, conocidos los valores de α y b , de la expresión (3) obtenemos c :

$$4 \cdot 0 + 2 \cdot (-3) + c = 8 \quad ; ; \quad 0 - 6 + c = 8 \quad ; ; \quad c = 14.$$

La función resulta ser $f(x) = x^3 - 3x + 14$

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule A^2 y A^3 .

b) Deduzca el valor de A^{101} . (Nota: Trabaje con radicales; no utilice la representación decimal de los elementos de la matriz)

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 & -0 - 0 + 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 & 0 - 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & -0 - 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 & -0 - 0 + 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} + 0 & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} + 0 & -0 - 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 & -0 - 0 + 0 & 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I = A^3.$$

b)

Teniendo en cuenta el cociente adjunto, podemos hacer lo siguiente: $101 \overline{) 3}$
 $2 \underline{33}$

$$A^{101} = A^{33 \cdot 3} \cdot A^2 = (A^3)^{33} \cdot A^2 = I^{33} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = A^{101}.$$

$$A^{101} = A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5ª) Considere la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z-a$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - 5z = 5$.

a) Estudie la posición relativa de la recta r y el plano π en función del parámetro α .

b) Cuando $\alpha = 3$, calcule la distancia de la recta r al plano π .

a)

La expresión de r por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z-a \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1=3z-3a \\ -x+1=3y+6 \end{array} \right\} \;; \; r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x-3z-(1-3a)=0 \\ x+3y+5=0 \end{array} \right. .$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-3z=1-3a \\ x+3y=-5 \\ 2x+y-5z=5 \end{array} \right. .$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 1-3a \\ 1 & 3 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} .$$

Según los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

Rango $M =$ Rango $M' = 3 \rightarrow$ Secantes. (un punto en común)

Rango $M = 2 \;;$ Rango $M' = 3 \rightarrow$ Paralelos. (ningún punto en común)

Rango $M =$ Rango $M' = 2 \rightarrow$ Recta contenida en plano. (∞ puntos en común)

Los rangos de M y M' son los siguientes:

$$\text{Rango } M \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 3 + 18 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M = 2} .$$

Determinamos ahora el rango de M' :

$$\{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1-3a \\ 1 & 3 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 1 - 3a - 6(1-3a) + 5 = 21 - 3a - 6 + 18a = 15 + 15a =$$

$$= 15(a+1) = 0 \Rightarrow \underline{a = -1} .$$

$$\{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1-3a \\ 1 & 0 & -5 \\ 2 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -5(1-3a) + 30 - 25 + 15 = -5 + 15a + 20 = 15a + 15 =$$

$$= 15(a+1) = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

$$\{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1-3a \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = -15(1-3a) + 15 + 45 = -15 + 45a + 60 = 45a + 45 =$$

$$= 45(a+1) = 0 \Rightarrow \underline{a = -1}.$$

Para $a \neq -1 \Rightarrow \text{Rango } M = 2$;; $\text{Rango } M' = 3 \Rightarrow \text{La recta } r \text{ y el plano } \pi \text{ son paralelos}$

Para $a = -1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 \Rightarrow \text{La recta } r \text{ está contenida en el plano } \pi$

b)

Para $\alpha = 3$ la recta es $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = z-3$; es paralela al plano $\pi \equiv 2x + y - 5z = 5$, según el apartado anterior. La distancia de la recta r al plano π es la misma que la de un punto de r al plano π . Un punto de r es $A(1, -2, 3)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dado por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; aplicándola al punto $A(1, -2, 3)$ y al plano $\pi \equiv 2x + y - 5z - 5 = 0$, es:

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 2 - 5 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{|2 - 2 - 15 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 25}} = \frac{20}{\sqrt{30}} = \frac{20\sqrt{30}}{30} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{30}}{3}}}$$

6ª) Sea $f(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} (a^2 + x^2) \cdot dx$ para $a > 0$.

a) Comprueba que $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$.

b) Calcule el valor del parámetro a para que la función $f(a)$ tenga un mínimo relativo.

a)

$$f(a) = \int_0^{\frac{1}{a}} (a^2 + x^2) \cdot dx = \left[a^2 x + \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{a}} = \left[a^2 \cdot \frac{1}{a} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{3} \right] - 0 = a + \frac{1}{3a^3}.$$

$$\underline{\underline{f(a) = \frac{1}{3a^3} + a, \text{ como teníamos que comprobar}}}$$

b)

Una función tiene un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada y hacen positiva a la segunda derivada.

$$f'(a) = \frac{-9a^2}{(3a^3)^2} + 1 = \frac{-9a^2}{9a^6} + 1 = 1 - \frac{1}{a^4} = 0 \quad ;; \quad 1 = \frac{1}{a^4} \quad ;; \quad a^4 = 1 \Rightarrow \underline{a_1 = -1} \quad ;; \quad \underline{a_2 = 1}.$$

$$f''(a) = 0 - \frac{-4a^3}{(a^4)^2} = \frac{4a^3}{a^8} = \frac{4}{a^5} \Rightarrow \begin{cases} f''(-1) = \frac{4}{(-1)^5} = \frac{4}{-1} = -4 < 0 \Rightarrow \underline{\text{Máx. para } x = -1} \\ f''(1) = \frac{4}{1^5} = \frac{4}{1} = 4 > 0 \Rightarrow \underline{\text{Mín. para } x = 1} \end{cases}$$

La función $f(a) = \frac{1}{3a^3} + a$ tiene un mínimo relativo para $a = 1$
