PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2011

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.
Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES A

1ª) Dada la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$.

a) Encuentre un vector director de r.

b) Calcular la ecuación continua de la recta paralela a r que pasa por el punto P(1, 0, -1)

----

a)

Los vectores normales de los planos que determinan a la recta r son $\overrightarrow{n_1} = (2,\ -1,\ 3)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,\ 0,\ 1)$. Un vector director de r puede ser cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$.

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -i + 3j + k - 2j = -i + j + k \Rightarrow \underline{\underline{\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ -1)}}.$$

b)

El haz de los infinitos planos paralelos a r tiene como vector director el mismo que el de r, $\overrightarrow{v_r} = (1,\ -1,\ -1)$.

La expresión de la recta s paralela a r dada por unas ecuaciones continuas es:

$$\underline{\underline{s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-1}}}.$$

****

2ª) Si tenemos la matriz invertible A y la ecuación matricial X · A + B = C:

a) Obtener la expresión de X.

b) Hallar la matriz X cuando $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

----

a)

$$X \cdot A + B = C \;;;\; X \cdot A = C - B .$$

Multiplicando los dos términos por la izquierda por A^{-1} y operando:

$$X \cdot A \cdot A^{-1} = (C-B) \cdot A^{-1} \;;;\; X \cdot I = (C-B)\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{X = (C-B)\cdot A^{-1}}} .$$

b)

Hallar la matriz X cuando $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Sea $A^{-1}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y sabiendo que A · A^{-1} = I:

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I \;;;\; \begin{pmatrix} a-2c & b-2d \\ -a+c & -b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{cases} \left.\begin{array}{l} a-2c=1 \\ -a+c=0 \end{array}\right\} \to a = c & \Rightarrow a-2a=1 \;;;\; \underline{a=c=-1} \\ \left.\begin{array}{l} b-2d=0 \\ -b+d=1 \end{array}\right\} b = d-1 & \Rightarrow d-1-2d=0 \;;;\; \underline{d=-1} \;;;\; \underline{b=-2} \end{cases} \right\} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}.$$

$$X = (C-B)\cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2-0 & -4-0 \\ -3+2 & -6+2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}}} = X .$$

****

3ª) Definimos la función $f(x)=a(1-x^2)$ y $g(x)=\frac{x^2-1}{a}$, siendo α > 0.

a) Comprobar que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones es la expresión $S=\frac{4(1+a^2)}{3a}$.

b) Calcular el valor del parámetro α para que esta área sea mínima.

----

a)

Los puntos de corte de las dos funciones son las soluciones de la ecuación que se obtiene de su igualación:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow a(1-x^2)=\frac{x^2-1}{a} \;;;\; a^2(1-x^2)=x^2-1 \;;;\; a^2(1-x^2)+(1-x^2)=0 \;;;$$

$$(a^2+1)(1-x^2)=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \;;;\; \underline{x_1=-1} \;;;\; \underline{x_2=1}.$$

Para a > 0, f(x) es una parábola cóncava $(\cap)$ y g(x) es una parábola cóncava $(\cup)$.

Las dos funciones son simétricas respecto al eje de ordenadas por ser $f(x)=f(-x)$ y $g(x)=g(-x)$, lo que facilita el cálculo del área pedida.

En el intervalo abierto perteneciente al recinto cuyo área se pide, todas las ordenadas de la función g(x) son mayores que las correspondientes ordenadas de f(x).

Considerando todo lo anterior, el área pedida es la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^1[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^1\left[a(1-x^2)-\frac{x^2-1}{a}\right]\cdot dx=2\cdot\left[ax-\frac{ax^3}{3}-\frac{x^3}{3a}+\frac{x}{a}\right]_0^1=$$

$$=2\cdot\left[x\left(\frac{3a^2-a^2-1+3}{3a}\right)\right]_0^1=2\cdot\left[x\left(\frac{2a^2+2}{3a}\right)\right]_0^1=\underline{\frac{4(a^2+1)}{3a}=S}.$$

<u>El valor del área es la expresión dada, como acabamos de comprobar.</u>

b)

El área es mínima cuando su primera derivada es cero y la segunda derivada es negativa para los valores que anulan la primera.

$$S'(a)=\frac{4}{3}\cdot\frac{2a\cdot a-(a^2+1)\cdot 1}{a^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2a^2-a^2-1}{a^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{a^2-1}{a^2}=0\Rightarrow a^2-1=0\Rightarrow\begin{cases}\underline{a_1=1}\\ \underline{a_2=-1}\end{cases}.$$

Como es α > 0, la solución es α = 1, como se justifica a continuación.

$$S''(a)=\frac{4}{3}\cdot\frac{2a\cdot a^2-\left(a^2-1\right)\cdot 2a}{a^4}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2a^2-2a^2+2}{a^3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{a^3}=\underline{\frac{8}{3a^2}}.$$

$S''(1)=\frac{8}{3\cdot 1^2}>0 \Rightarrow$ Mínimo para α = 1, como queríamos justificar.

El valor del área es mínima para α = 1.

****

4ª) Considere el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x+2y-az=-3 \\ 2x+(a-5)y+z=4a+2 \\ 4x+(a-1)y-3z=4 \end{array}\right\}$.

a) Calcule los valores del parámetro α para que el sistema no sea compatible determinado.

b) ¿Hay algún valor de α para el cual x = 1, y = 3, z = 1 sea la única solución del sistema?

----

a)

Para que el sistema no sea compatible determinado basta con que sea menor que tres el rango de la matriz de coeficientes.

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{pmatrix}$.

Para que el rango de A sea menor que tres su determinante tiene que ser cero:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -a \\ 2 & a-5 & 1 \\ 4 & a-1 & -3 \end{vmatrix}=0 \;;\; -3(a-5)-2a(a-1)+8+4a(a-5)-(a-1)+12=0 \;;$$

$$-3a+15-2a^2+2a+20+4a^2-20a-a+1=0 \;;\; 2a^2-22a+36=0 \;;\; a^2-11a+18=0 \;;$$

$$a=\frac{11\pm\sqrt{121-72}}{2}=\frac{11\pm\sqrt{49}}{2}=\frac{11\pm 7}{2} \Rightarrow \underline{a_1=2} \;;\; \underline{a_2=9}.$$

<u>El sistema no es compatible determinado para α = 2 y para α = 9.</u>

b)

Para que x = 1, y = 3, z = 1 sea solución del sistema tiene que satisfacer el sistema de ecuaciones para estos valores:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-az=-3 \\ 2x+(a-5)y+z=4a+2 \\ 4x+(a-1)y-3z=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1+6-a=-3 \\ 2+3a-15+1=4a+2 \\ 4+3a-3-3=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a=10 \\ a=-14 \\ a=2 \end{array}\right\} ??$$

<u>No hay ningún valor de α para el cual x = 1, y = 3, z = 1 sea solución del sistema</u>

****

5ª) Sean las rectas $r_1 \equiv x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{1-z}{2}$ y $r_2 \equiv \frac{x+3}{2}=y+1=\frac{z+1}{2}$.

a) Compruebe que r_1 y r_2 son perpendiculares.

b) Comprobar que se cortan y determinar el punto de corte.

----

a)

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Los vectores directores de r_1 y r_2 son $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 2,\ -2)$ y $\overrightarrow{v_2}=(2,\ 1,\ 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2}=(1,\ 2,\ -2)\cdot(2,\ 1,\ 2)=2+2-4=\underline{0}$.

<u>Queda comprobado que las rectas r_1 y r_2 son perpendiculares.</u>

b)

Existen diversos procedimientos para determinar si dos rectas se cortan o no; el que vamos a utilizar es el siguiente:

Determinamos un vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como extremo un punto de r_1 y como origen un punto de r_2. Un punto de r_1 es A(2, 3, 1) y un punto de r_2 es B(-3, -1, -1).

$\overrightarrow{w}=\overrightarrow{BA}=A-B=(2,\ 3,\ 1)-(-3,\ -1,\ -1)=(5,\ 4,\ 2)$.

Si los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios implica, necesariamente, que también las rectas son coplanarias y como $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 2,\ -2)$ y $\overrightarrow{v_2}=(2,\ 1,\ 2)$ son linealmente independientes por ser $\frac{1}{2}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{-2}{2}$, las rectas se cortan en un punto.

Para que los vectores $\{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\}$ sean coplanarios es necesario que su rango sea menor que tres, o sea, que el determinante de la matriz que determinan sea cero.

$$Rango\ \{\overrightarrow{v_1},\ \overrightarrow{v_2},\ \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}=2-16+20+10-8-8=32-32=\underline{0}$$

<u>Queda comprobado que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un punto.</u>

Para determinar el punto de corte expresamos las rectas mediante ecuaciones paramétricas.

$$r_1 \equiv x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{1-z}{2} \;\Rightarrow\; \underline{r_1 \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{cases}}.$$

$$r_2 \equiv \frac{x+3}{2}=y+1=\frac{z+1}{2} \;\Rightarrow\; \underline{r_2 \equiv \begin{cases} x=-3+2\mu \\ y=-1+\mu \\ z=-1+2\mu \end{cases}}.$$

El punto en común P se obtiene de la igualación de las expresiones anteriores de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} 2+\lambda=-3+2\mu \\ 3+2\lambda=-1+\mu \\ 1-2\lambda=-1+2\mu \end{array}\right\}$$. Sumando las dos últimas ecuaciones:

$$4=-2+3\mu \;\;;;\;\; 3\mu=6 \;\;;;\;\; \underline{\mu=2} \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P(1,\ 1,\ 3)}}.$$

****

6ª) Sea la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-ax}$ cuando $\alpha \neq 0$.

a) Calcular el valor de α para que f(x) tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2.

b) Cuando α = 2, clasificar a sus extremos relativos.

----

a)

Una función tiene un extremo relativo en un punto cuando su derivada primera se anula para el valor de x de ese punto.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^{ax}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot e^{ax} - x^2 \cdot a \cdot e^{ax}}{e^{2ax}} = \underline{\frac{2x - ax^2}{e^{ax}}}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x - ax^2}{e^{ax}} = 0 \;;\; 2x - ax^2 = 0 \;;\; 2x = ax^2 \;;\; a = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow \underline{x = 2} \Rightarrow \underline{a = 1}.$$

Para α = 1 la función f(x) tiene un extremo relativo para x = 2.

b)

Para α = 2 es $f(x) = \frac{x^2}{e^{2x}}$ y $f'(x) = \frac{2x - 2x^2}{e^{ax}} = \frac{2x(1-x)}{e^{ax}}$.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(1-x)}{e^{ax}} = 0 \;;\; 2x(1-x) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;;\; \underline{x_2 = 1}.$$

Para diferenciar los extremos relativos entre máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y si es positivo, de un mínimo.

$$f''(x) = \frac{(2 - 4x) \cdot e^{2x} - 2x(1-x) \cdot 2 \cdot e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{2 - 4x - 4x(1-x)}{e^{2x}} = 2 \cdot \frac{1 - 2x - 2x + 2x^2}{e^{2x}} =$$

$$\underline{= 2 \cdot \frac{2x^2 - 4x + 1}{e^{2x}} = f''(x)}.$$

$$f''(0) = 2 \cdot \frac{0 - 0 + 1}{e^0} = 2 \cdot \frac{1}{1} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para x = 0}.$$

$$f(0) = \frac{0}{e^0} = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Mínimo relativo}: O(0,\ 0)}}.$$

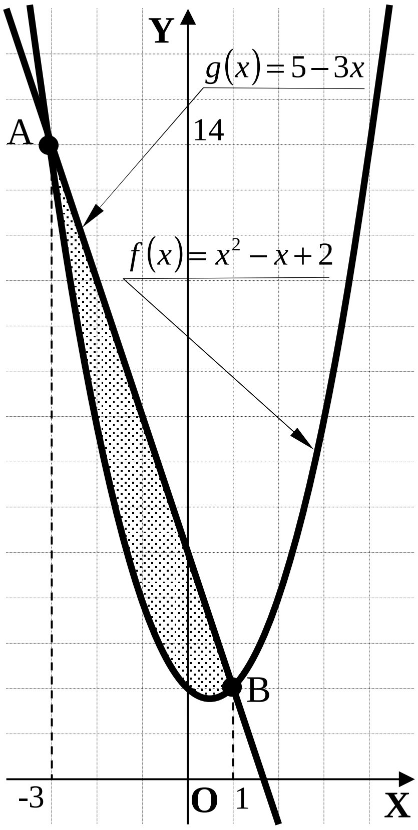
$$f''(1) = 2 \cdot \frac{2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 1}{e^2} = 2 \cdot \frac{2 - 4 + 1}{e^2} = \frac{-2}{e^4} < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para x = 1}.$$

$$f(1)=\frac{1^2}{e^2}=\frac{1}{e^2} \Rightarrow \underline{\underline{Máximo\ \ relativo:\ A\left(1,\ \frac{1}{e^2}\right)}}$$

****

CUESTIONES B

1ª) Calcule el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $f(x)=x^2-x+2$ y $g(x)=5-3x$.



Los puntos de corte de la recta y la parábola son los siguientes:

$$x^2-x+2=5-3x \;;;\; x^2+2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-3 \rightarrow \underline{A(-3,\ 14)} \\ x_2=1 \rightarrow \underline{B(1,\ 2)} \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es la de la figura.

Por ser todas las ordenadas de la parábola menores que las de la recta en el intervalo (-3, 1), la superficie es la diferencia de las limitadas por la recta y la parábola, respectivamente, o sea:

$$S=\int_{-3}^{1}\left[5-3x-\left(x^2-x+2\right)\right]dx=\int_{-3}^{6}\left(-x^2-2x+3\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}+3x\right]_{-3}^{1}=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-3}^{1}=$$

$$=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)-\left[-\frac{(-3)^3}{3}-(-3)^2+3\cdot(-3)\right]=-\frac{1}{3}+2-\frac{27}{3}+9+9=-\frac{1}{3}+2+9=\frac{-1+33}{2}=\underline{\underline{\frac{32}{3}\,u^2}}=S.$$

****

2ª) Dado el plano $\pi \equiv 2x + y - z = 5$:

a) Calcular la ecuación del plano paralelo a π que pasa por el punto P(1, 0, -1).

b) Determine también la distancia del punto P al plano π.

----

a)

El haz de planos paralelos a π tiene por ecuación $\alpha \equiv 2x + y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz anterior, el plano β que pasa por P(1, 0, -1) es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + y - z + D = 0 \\ P(1,\ 0,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 0 - (-1) + D = 0 \ ;;\ 2 + 1 + D = 0 \ ;;\ \underline{D = -3}.$$

$$\underline{\underline{\beta \equiv 2x + y - z - 3 = 0}}$$

b)

La distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula: $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la formula al plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$ y al punto P(1, 0, -1) :

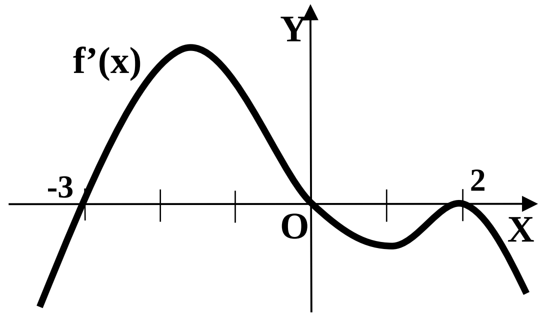
$$d(P,\ \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 0 - (-1) - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 + 1 - 5|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{6}}{3}\ unid. = d(P,\ \pi)}}.$$

****

3ª) La gráfica adjunta corresponde a la derivada de la función f(x).

a) Explique razonadamente qué valores de x corresponden a máximos o mínimos relativos de la función f(x).

b) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x).



----

a)

Una función tiene un extremo relativo para los valores que anulan la primera derivada, por lo que, de la observación de la figura, la función f(x) puede tener extremos relativos para x = -3, x = 0 y x = 2.

Para diferenciar los máximos de los mínimos relativos hay que recurrir a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera derivada, se trata de un mínimo relativo y si es negativa, de un mínimo relativo.

Observando la figura, para x = -3 la función derivada f'(x) es creciente, por lo que su derivada (derivada de la derivada), que es la segunda derivada es positiva, por lo cual:

La función f(x) tiene un mínimo relativo para x = -3.

Por un razonamiento similar, para x = 0 la función derivada f'(x) es decreciente, por lo que su derivada (derivada de la derivada), que es la segunda derivada es negativa, por lo cual:

La función f(x) tiene un máximo relativo para x = 0.

Nótese que la función derivada se anula para x = 2 y sin embargo no existe máximo ni mínimo relativos por no ser ni creciente ni decreciente la derivada. Para este valor de x la función tiene un punto de inflexión.

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto según que su derivada es positiva o negativa en ese punto, respectivamente.

Por ser f'(x) continua en R y observando la figura se deducen los períodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\underline{Crecimiento:\ f'(x)>0\ \Rightarrow\ (-3,\ 0)}}$$

$$\underline{\underline{Decrecimiento:\ f'(x)<0\ \Rightarrow\ (-\infty,\ -3)\cup(0,\ 2)\cup(2,\ +\infty)}}$$

****

4ª) Analice, según los valores del parámetro k, el carácter (es decir, si es compatible o no y si es determinado o no) del sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x+y-z=k-4 \\ (k-6)y+3z=0 \\ (k+1)x+2y=3 \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & k-6 & 3 \\ k+1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & k-4 \\ 0 & k-6 & 3 & 0 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de A en función de k es:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & k-6 & 3 \\ k+1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=3(k+1)+(k-6)(k+1)-12=(k+1)(3+k-6)-12=$$

$$=(k+1)(k-3)-12=k^2-3k+k-3-12=k^2-2k-15=0 \;;;\; k=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm 8}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{k_1=-3} \;;;\; \underline{k_2=5}.$$

$$\underline{\underline{Para \begin{Bmatrix} k\neq -3 \\ k\neq 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=3=n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ Deter\min ado}}$$

$$\text{Para k = -3} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -7 \\ 0 & -9 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ A' \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -7 \\ 0 & -9 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=$$

$$=-54+126=72\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ A'=3}.$$

$$\underline{\underline{Para\ k=-3 \Rightarrow Rango\ A=2 \;;;\; Rango\ A'=3 \Rightarrow Incompatible}}$$

$$\text{Para k = 5} \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C_1=2C_4 \Rightarrow \underline{Rango\ A'=2}.$$

$$\underline{\underline{Para\ k=5 \Rightarrow Rango\ A=Rango\ A'=2<n^o\ incóg. \Rightarrow Compatible\ In\det er\min ado}}$$

****

5ª) Calcule la ecuación general del plano π (es decir, de la forma Ax+By+Cz+D=0) del plano que contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} y=2 \\ z=1 \end{cases}$ y forma un ángulo de 45º con el plano z = 0.

Un punto de la recta r es, por ejemplo, P(0, 2, 1).

El plano pedido (que son dos) tiene que ser, lógicamente, también paralelo al eje X, por lo que su expresión general es de la forma $\alpha \equiv By+Cz+D=0$.

El ángulo que forman dos planos es igual que el ángulo que forman sus vectores normales; un vector normal del plano z = 0 es $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$ y un vector normal del plano α es $\overrightarrow{v_\alpha}=(0,\ B,\ C)$.

Según lo pedido, los vectores $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_\alpha}=(0,\ B,\ C)$ tienen que formar 45º.

El ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar de dos vectores; siendo los vectores $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, sería:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}{\left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right|}.$$

Aplicando el caso a los vectores $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$ y $\overrightarrow{v_\alpha}=(0,\ B,\ C)$ y sabiendo que forman 45º es:

$$\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{v_\alpha}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_\alpha}\right|} = \frac{(0,\ 0,\ 1)\cdot(0,\ B,\ C)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{B^2+C^2}} = \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}} \ ;;$$

$$\frac{2}{4} = \frac{C^2}{B^2+C^2} \ ;;\ B^2+C^2=2C^2 \ ;;\ B^2=C^2 \Rightarrow \underline{B_1=C} \ ;;\ \underline{B_2=-C}.$$

Los haces de planos que forman 45º con z = 0 y son paralelos a X son los siguientes: $\alpha_1 \equiv By+Bz+D=0$ y $\alpha_2 \equiv By-Bz+D=0$, que también pueden expresarse de las formas: $\alpha_1 \equiv y+z+K=0$ y $\alpha_2 \equiv y-z+K=0$.

Considerando que si los planos pedidos contienen a la recta r contienen a todos sus puntos, tienen que satisfacer las ecuaciones para el punto de r que hemos considerado: P(0, 2, 1).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \equiv y+z+K=0 \\ P(0,\ 2,\ 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2+1+K=0 \ ;;\ \underline{K=-3} \Rightarrow \underline{\underline{\pi_1 \equiv y+z-3=0}}.$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_2 \equiv y - z + K = 0 \\ P(0,\ 2,\ 1)\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 - 1 + K = 0\ ;;\ \underline{K = -1} \Rightarrow\ \underline{\underline{\pi_2 \equiv y - z - 1 = 0}}.$$

****

6ª) Dentro de un triángulo rectángulo, de catetos 3 y 4 cm, hay un rectángulo. Dos lados del rectángulo están situados en los catetos del triángulo y uno de los vértices del rectángulo es la hipotenusa del triángulo.

a) Haga un esbozo de la situación descrita.

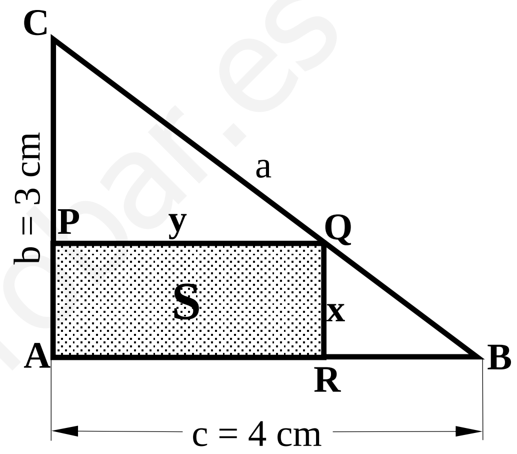
b) Se x es la longitud del lado del rectángulo que está situado en el cateto pequeño e y es el otro lado del rectángulo, compruebe que se cumple que 4x + 3y = 12.

c) Determine las dimensiones del rectángulo para que el área sea máxima.

----

a)

El esquema de la situación es el que indica la figura.



b)

El triángulo de vértices DPQ es semejante al triángulo de vértices ABC por estar situados en la situación de Thales, por lo cual, aplicando el teorema:

$$\frac{y}{4}=\frac{3-x}{3}\ \Rightarrow\ \underline{y=\frac{4}{3}(3-x)}.$$

$$4x+3y=4x+3\cdot\frac{4}{3}(3-x)=4x+4(3-x)=4x+12-4x=\underline{12}\ .$$

<u>En efecto: 4x + 3y = 12, como teníamos que comprobar.</u>

c)

El área del rectángulo es $S=x\cdot y=x\cdot\frac{4}{3}(3-x)=\underline{\frac{4}{3}\left(3x-x^2\right)=S}$.

Para que el área sea máxima su derivada tiene que ser cero:

$$S'(x)=\frac{4}{3}(3-2x)\ ;;\ S'(x)=0\Rightarrow 3-2x=0\ ;;\ 3=2x\ ;;\ x=\frac{3}{2}=\underline{1'5\ cm(x)}.$$

$$y=\frac{4}{3}(3-x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4}{2}=\underline{2\ cm=y}\ .$$

Justificación de que se trata de un máximo:

$$S''(x)=\frac{3}{2}\cdot(-2)=-3<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{Máximo,\ c.q.j.}}$$

El área del rectángulo es máxima para $x = 1'5$ cm e $y = 2$ cm.

****