PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

SEPTIEMBRE – 2012

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué es lo que quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Determine el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en función del parámetro k.

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & k & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix}=k+k+k-k^3-1-1=-k^3+3k-2=0$;; $k^3-3k+2=0.$ Aplicando Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	**2**	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Las soluciones diferentes son $\underline{k_1=1}$ y $\underline{k_2=-2}$.

$$\underline{\underline{Para \left\{\begin{array}{c} k\neq 1 \\ k\neq -2 \end{array}\right\} \Rightarrow Rango \ \ A=3}} \qquad \underline{\underline{Para \ \ k=1 \Rightarrow Rango \ \ A=1}} \qquad \underline{\underline{Para \ \ -2 \Rightarrow Rango \ \ A=2}}$$

****

2ª) Sea la función $f(x)=\frac{ax^2}{x+b}$, siendo α ≠ 0.

a) Determine si tiene alguna asíntota vertical, en función del parámetro b.

b) Indique el valor de los parámetros α y b para que la función f(x) tenga a la recta de ecuación $y=2x-4$ como asíntota oblicua a +∞.

----

a)

Las asíntotas verticales son los valores de x que anulan el denominador.

$x+b=0$;; $\underline{x=-b}$.

La recta x = -b es asíntota vertical de f(x).

b)

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador, como es el caso que nos ocupa.

Las asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{ax^2}{x+b}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2}{x^2+bx}=2 \Rightarrow \underline{\underline{a=2}}.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+b}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2-2bx}{x+b}=-4 \Rightarrow \underline{\underline{b=2}}.$$

****

3ª) Considera el sistema de ecuaciones lineales siguiente $\left.\begin{array}{r} x+y-3z=2 \\ 2x+ay-5z=2a+3 \\ 2x-3y+(a-2)z=9 \end{array}\right\}$:

a) Calcule el valor o los valores del parámetro α para el cual o para los cuáles el sistema es compatible indeterminado.

b) ¿Cuántas soluciones tiene el sistema cuando α = -3?

----

a)

El sistema es compatible indeterminado cuando el rango de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales y menores que el número de incógnitas.

Las matrices de coeficientes y ampliada son:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & -5 & 2a+3 \\ 2 & -3 & a-2 & 9 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función de α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & a & -5 \\ 2 & -3 & a-2 \end{vmatrix}=a(a-2)+18-10+6a-15-2(a-2)=(a-2)^2-7+6a=$$

$$=a^2-4a+4-7+6a=a^2+2a-3=0 \;;;\; a=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}=-1\pm 2 \Rightarrow \underline{a_1=1} \;;;\; \underline{a_2=-3}.$$

$$Para\;\; a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 5 \\ 2 & -3 & -1 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\;\; de\;\; M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \{C_1,\,C_2,\,C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix}=9-12+10-4+15-18=34-34=0 \\ \{C_1,\,C_3,\,C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}=-45-4-30+20+5+54=79-79=0 \\ \{C_2,\,C_3,\,C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -5 & 5 \\ -3 & -1 & 9 \end{vmatrix}=-45-2+45-30+5+27=32-32=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Rango\;\; M'=2}.$$

$$Para\ \ a=-3\ \Rightarrow\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & -5 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\ \ de\ \ M'\ \Rightarrow \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & 9 \end{vmatrix} = -27-6-6+12-9-18=-54\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\ \ M'=3}.$$

El sistema es compatible indeterminado para α = 1.

b)

Para α = -3 el rango de la matriz de coeficientes es dos y el rango de la matriz ampliada es tres, con lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, es sistema es incompatible.

Para α = -3 el sistema no tiene ninguna solución.

****

4ª) Una fábrica produce diariamente x toneladas de un producto A y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de un producto B. La cantidad máxima del producto A que se puede producir es 8 toneladas. El precio de venta del producto A es 100 euros por tonelada y el del producto B es 250 euros por tonelada.

a) Construye la función de la variable x que nos proporciona los ingresos diarios, suponiendo que se vende toda la producción.

b) Calcule cuantas toneladas de cada producto se han de producir diariamente para obtener el máximo de ingresos, y comprobar que es realmente un máximo relativo.

----

a)

Los ingresos diarios vienen dados por la siguiente función:

$$I(x)=100x+250\cdot\frac{40-5x}{10-x}=50\left(2x+5\cdot\frac{40-5x}{10-x}\right)=50\cdot\left(2x+\frac{200-25x}{10-x}\right)=$$

$$=50\cdot\frac{20x-2x^2+200-25x}{10-x}=\underline{\underline{-50\cdot\frac{2x^2+5x-200}{10-x}=I(x)}}.$$

b)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula la primera derivada.

$$I'(x)=-50\cdot\frac{(4x+5)\cdot(10-x)-(2x^2+5x-200)\cdot(-1)}{(10-x)^2}=$$

$$=-50\cdot\frac{40x-4x^2+50-5x+2x^2+5x-200}{(10-x)^2}=-50\cdot\frac{40x-2x^2-150}{(10-x)^2}=\underline{100\cdot\frac{x^2-20x+75}{(10-x)^2}=f'(x)}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow 100\cdot\frac{x^2-20x+75}{(10-x)^2}=0\ ;;\ x^2-20x+75=0\ ;;\ x=\frac{20\pm\sqrt{400-300}}{2}=\frac{20\pm\sqrt{100}}{2}=$$

$$=\frac{20\pm10}{2}=10\pm5\Rightarrow \underline{x_1=5}\ y\ \underline{x_1=15}.$$

Como tiene que ser x ≤ 8, la solución es $\underline{x=5}$.

La cantidad de toneladas que se producen diariamente del producto B son las siguientes: $\frac{40-5\cdot5}{10-5}=\frac{40-25}{5}=\frac{15}{5}=3$.

<u>Los ingresos máximos se obtienen produciendo 5 Tm del producto A y 3 Tm del B.</u>

Para comprobar que se trata de un máximo tiene que ser negativa la segunda derivada para el valor que anula la primera derivada.

$$I''(x)=100\cdot\frac{(2x-20)\cdot(10-x)^2-\left(x^2-20x+75\right)\cdot 2\cdot(10-x)\cdot(-1)}{(10-x)^4}=$$

$$=100\cdot\frac{(2x-20)\cdot(10-x)+2\left(x^2-20x+75\right)}{(10-x)^3}=100\cdot\frac{20x-2x^2-200+20x+2x^2-40x+150}{(10-x)^3}=$$

$$=100\cdot\frac{-40x-50}{(10-x)^3}=\underline{-1000\cdot\frac{4x+5}{(10-x)^3}=I''(x)}.$$

$$I''(5)=-1000\cdot\frac{4\cdot 5+5}{(10-5)^3}=-1000\cdot\frac{25}{5^3}=-\frac{1000}{5}=-200<0\ \Rightarrow\ \underline{\underline{\textit{Máximo para } x=5,\ c.q.j.}}$$

****

5ª) Considere las rectas siguientes: $r \equiv \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1}$ y $s \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2}$.

a) Compruebe que son secantes.

b) Calcule la ecuación continua de la recta que corta y es perpendicular a las dos rectas.

----

a)

Un punto y un vector de cada una de las rectas son los siguientes:

Recta r: punto A(-1, 1, 1) y vector director $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -1)$.

Recta s: punto B(4, 1, 2) y vector director $\overrightarrow{v_s} = (3,\ -1,\ 2)$.

Como quiera que los vectores $\overrightarrow{v_r}\ y\ \overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes, las rectas r y s se cruzan o se cortan. Para diferenciar el caso haremos lo siguiente: determinamos un tercer vector $\overrightarrow{w}$ que tenga como origen el punto A de r y por extremo el punto de s B(-2, 2, 1):

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = B - A = (5,\ 0,\ 1).$$

Si el rango de $\{\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\}$ es 3, r y s se cruzan y si el rango es 2, se cortan:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2+10-5-3 = 10-10 = 0 \Rightarrow Rango\ \ de\ \left[\overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s},\ \overrightarrow{w}\right] = 2.$$

<u>Las rectas r y s se cortan, como teníamos que comprobar.</u>

b)

Para obtener el punto Q de corte de las rectas r y s las expresamos por ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y-1 = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \underline{r \equiv \begin{cases} x = -1+2\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases}}\ ;;\ s \equiv \frac{x-4}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = 4+3\mu \\ y = 1-\mu \\ z = 2+2\mu \end{cases}}.$$

$$\left.\begin{cases} -1+2\lambda = 4+3\mu \\ 1+\lambda = 1-\mu \\ 1-\lambda = 2+2\mu \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda+\mu = 0 \\ -\lambda-2\mu = 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -\mu = 1\ ;;\ \underline{\mu = -1}\ ;;\ \underline{\lambda = 1} \Rightarrow \underline{Q(1,\ 2,\ 0)}.$$

Un vector $\overrightarrow{m}$, perpendicular a $\overrightarrow{v_s}\ y\ \overrightarrow{v_t}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente de su producto vectorial:

$$\overrightarrow{m} = \overrightarrow{v_s} \wedge \overrightarrow{v_t} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 3j - 2k - 3k - i - 4j = i - 7j - 5k \Rightarrow \underline{\overrightarrow{m} = (1,\ -7,\ -5)}.$$

La recta pedida p, expresada por unas ecuaciones continuas, es la siguiente:

$$\underline{\underline{p \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-7} = \frac{z}{-5}}}$$

****

6ª) Dadas la recta $y = ax + 1$ y la parábola $y = 3x - x^2$:

a) Calcule los valores del parámetro α para que sean tangentes.

b) Calcule los puntos de tangencia.

----

a)

La pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto.

El valor de la pendiente de la recta $y = ax + 1$ es $m = a$.

$$y' = 3 - 2x \Rightarrow 3 - 2x = a \;;;\; \underline{x = \frac{3-a}{2}}.$$

Como el punto de tangencia pertenece a la recta y a la parábola tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = ax + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot \frac{3-a}{2} - \left(\frac{3-a}{2}\right)^2 = a \cdot \frac{3-a}{2} + 1 \;;;\; \frac{9-3a}{2} - \frac{9-6a+a^2}{4} = \frac{3a-a^2}{2} + 1 \;;;$$

$$2 \cdot (9 - 3a) - (9 - 6a + a^2) = 2 \cdot (3a - a^2) + 4 \;;;\; 18 - 6a - 9 + 6a - a^2 = 6a - 2a^2 + 4 \;;;\; a^2 - 6a + 5 = 0 \;;;$$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} = 3 \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{a_1 = 1}} \;;;\; \underline{\underline{a_2 = 5}}.$$

b)

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$x = \frac{3-a}{2} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = 1 \cdot 1 + 1 = 2 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{T_1(1,\ 2)}} \\ \\ a_1 = 5 \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{3-5}{2} = -1 \Rightarrow y_2 = 5 \cdot (-1) + 1 = -4 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{T_2(-1,\ -4)}} \end{cases}$$

****