PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

COMUNIDAD DE CATALUÑA

JUNIO – 2013

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las siguientes seis cuestiones. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué.

Puede utilizar calculadora, pero no pueden utilizarse calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

CUESTIONES

1ª) Sabemos que el vector $\vec{v} = (2,\ 1,\ -1)$ es la solución del sistema $\left.\begin{array}{l} ax+by+cz=a+c \\ bx-y+bz=a-b-c \\ cx-by+2z=b \end{array}\right\}$.

Calcule el valor de los parámetros α, b y c.

Sustituyendo los respectivos valores de las incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a\cdot 2+b\cdot 1+c\cdot(-1)=a+c \\ b\cdot 2-1+b\cdot(-1)=a-b-c \\ c\cdot 2-b\cdot 1+2\cdot(-1)=b \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 2a+b-c=a+c \\ 2b-1-b=a-b-c \\ 2c-b-2=b \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a+b-2c=0 \\ a-2b-c=-1 \\ 2b-2c=-2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} a+b-2c=0 \\ a-2b-c=-1 \\ b-c=-1 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por Cramer:

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{2+1+4-1}{2-2+1+1}=\frac{6}{2}=\underline{\underline{3=a}}. \qquad b=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\frac{1+2-1}{2}=\frac{2}{2}=\underline{\underline{1=b}}.$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}}{2}=\frac{2+1+1}{2}=\frac{4}{2}=\underline{\underline{2=c}}\,.$$

****

2ª) La curvas $y = x^2$ y la recta $y = k$, con k > 0, determinan una región plana.

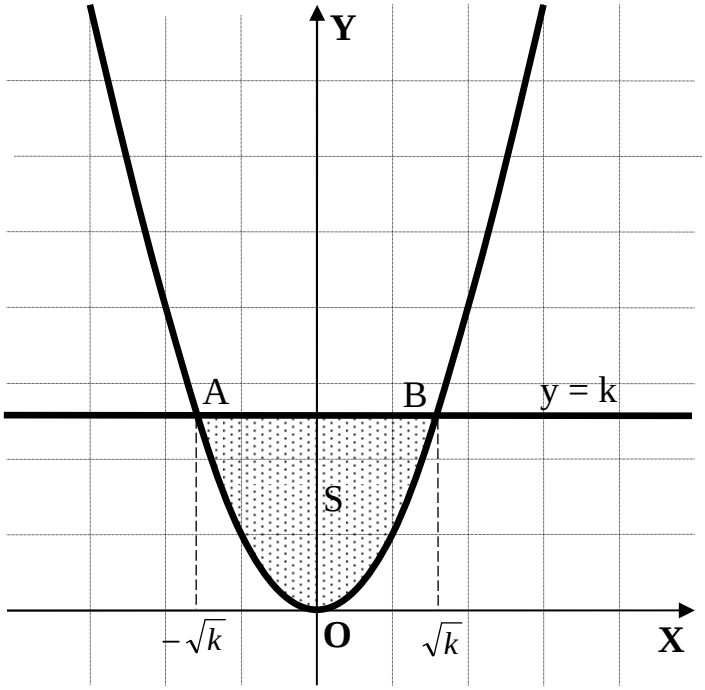
a) Calcule el valor del área de esta región en función del parámetro k.

b) Encuentre el valor de k para que el área limitada sea $\sqrt{6}$ u^2.

---

a)

La representación aproximada de la situación es la que se observa en la figura.



Los puntos A y B de corte de la recta con la parábola tienen como abscisas las soluciones del sistema formado por ambas, que son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = k \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = k \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = -\sqrt{k}} \\ \underline{x_2 = +\sqrt{k}} \end{cases}.$$

Por la simetría de la curva, se tiene:

$$S = 2 \cdot \int_0^{\sqrt{k}} \left(k - x^2\right) \cdot dx = 2 \cdot \left[kx - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{k}} = 2 \cdot \left(k\sqrt{k} - \frac{k\sqrt{k}}{3} \right) = 2 \cdot \frac{3k\sqrt{k} - k\sqrt{k}}{3} = \underline{\underline{\frac{4k\sqrt{k}}{3}\ u^2 = S}}.$$

b)

$$S = \sqrt{6} \Rightarrow \frac{4k\sqrt{k}}{3} = \sqrt{6}\ ;;\ \frac{16k^2 \cdot k}{9} = 6\ ;;\ k^3 = \frac{54}{16} = \frac{27}{8} = \frac{3^3}{2^3} \Rightarrow \underline{\underline{k = \frac{3}{2}}}.$$

****

3ª) Sea $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$:

a) ¿Qué significa que la matriz B sea la matriz inversa de A?

b) Encuentre el valor del parámetro p para que la matriz inversa de A y la matriz traspuesta de A coincidan.
Nota: No aproxime las raíces mediante valores con decimales; trabaje con los radicales.

---

a)

La matriz B es la matriz inversa de la matriz A cuando se cumpla que:

$$\underline{A \cdot B = B \cdot A = I}$$

(I es la matriz cuadrada unitaria de la misma dimensión que A y B).

b)

$$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}. \qquad A^t=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & p \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ p & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}-p\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}-p\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=$$

$$=-\frac{1}{6}-\frac{2p}{3\sqrt{2}}-\frac{p}{3\sqrt{2}}-\frac{2}{6}=-\frac{3}{6}-\frac{3p}{3\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}-\frac{p\sqrt{2}}{2}=\underline{-\frac{1+p\sqrt{2}}{2}=|A|}.$$

$$Adj.\ de\ A^t=\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & p \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & p \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & p \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{vmatrix} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{18}}-\frac{2}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{-2}{\sqrt{18}}-\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{-2p}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}}-\frac{p}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{12}} \\ \frac{-p}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{p}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-3}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{-3}{3\sqrt{2}} \\ \frac{-2p}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{12}}-\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{12}} & \frac{2}{2\sqrt{3}} \\ \frac{-p}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2p\sqrt{6}}{6} & \frac{-1-p\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-p}{\sqrt{3}} & \frac{1+p\sqrt{2}}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}=\underline{\begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-p\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{3}-p\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-p\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2p\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}=Adj.\ de\ A^t}.$$

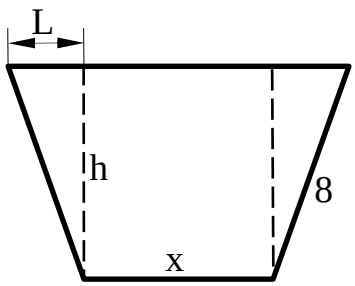
$$A^{-1} = \frac{-1+p\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-p\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{3}-p\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-p\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2p\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Según condiciones del ejercicio tiene que cumplirse la siguiente igualdad:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow -\frac{1+p\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-p\sqrt{6}}{3} & \frac{-\sqrt{3}-p\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-p\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}+2p\sqrt{3}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & p \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1+p\sqrt{2}}{2} = 1 \;;;\; \underline{\underline{p = \frac{\sqrt{2}}{2}}}.$$

****

4ª) Se quiere construir un canal que tenga como sección un trapecio isósceles de manera que la anchura superior del canal sea el doble de la anchura inferior y que los lados no paralelos sean de 8 metros. A la derecha tiene un esquema de la sección del canal.



a) Encuentre el valor de L de la gráfica en función de la variable x (anchura del fondo).

b) Sabemos que el área del trapecio es igual a su altura multiplicada por la semisuma de sus bases. Compruebe que, en este caso, el área de la sección viene dada por la fórmula $A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4}$.

c) Calcule el valor de x para que el área de la sección del canal sea máxima (no es necesario que compruebe que es realmente un máximo).

---

a)

$$x+2L=2x \;;;\; 2L=x \Rightarrow \underline{\underline{x=\frac{L}{2}}}.$$

b)

$$A=\frac{2x+x}{2}\cdot h=\frac{3x}{2}\cdot\sqrt{8^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{3x}{2}\cdot\sqrt{64-\frac{x^2}{4}}=\frac{3x}{2}\cdot\sqrt{\frac{256-x^2}{4}}=\frac{3x}{4}\cdot\sqrt{256-x^2}\,.$$

$$\underline{\underline{A(x)=\frac{3x\sqrt{256-x^2}}{4},\ \textit{como queríamos comprobar}}}.$$

c)

$$A(x)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{256x^2-x^4}\Rightarrow A'(x)=\frac{3}{4}\cdot\frac{512x-4x^3}{2\sqrt{256x^2-x^4}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{128x-x^3}{x\sqrt{256-x^2}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{128-x^2}{\sqrt{256-x^2}}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 128-x^2=0 \;;;\; x=\pm\sqrt{128}=\pm\sqrt{2^7}=\pm 8\sqrt{2} \Rightarrow \underline{x_1=-8\sqrt{2}} \;;;\; \underline{x_2=+8\sqrt{2}}$$

Las raíz negativa carece de sentido lógico.

$$\underline{\underline{\textit{La sección del canal es máxima para } x=8\sqrt{2} \textit{ metros}}}$$

****

5ª) Dados los puntos P(1, 0, -1) y Q(-1, 2, 3), encuentre un punto R de la recta dada en forma continua $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z-3}{-1}$ que cumpla que el triángulo de vértices P, Q y R es isósceles, siendo PR y QR los lados iguales del triángulo.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = -3 + 2\lambda \\ y = -4 + 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$.

Un punto genérico R de la recta r es de la forma $R(-3+2\lambda,\ -4+3\lambda,\ 3-\lambda)$.

$\overline{PR} = \sqrt{(-3+2\lambda-1)^2 + (-4+3\lambda-0)^2 + (3-\lambda+1)^2} = \sqrt{(-4+2\lambda)^2 + (-4+3\lambda)^2 + (4-\lambda)^2}$.

$\overline{PQ} = \sqrt{(-3+2\lambda+1)^2 + (-4+3\lambda-2)^2 + (3-\lambda-3)^2} = \sqrt{(-2+2\lambda)^2 + (-6+3\lambda)^2 + \lambda^2}$.

$\overline{PR} = \overline{PQ} \Rightarrow \sqrt{(-4+2\lambda)^2 + (-4+3\lambda)^2 + (4-\lambda)^2} = \sqrt{(-2+2\lambda)^2 + (-6+3\lambda)^2 + \lambda^2}$;;

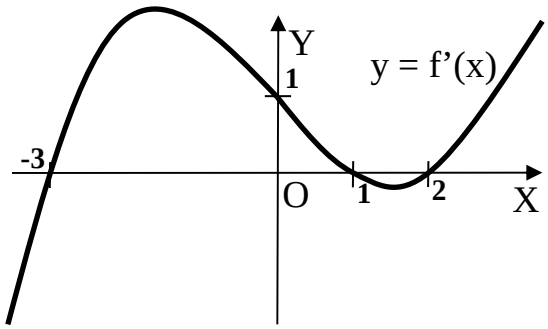
$(-4+2\lambda)^2 + (-4+3\lambda)^2 + (4-\lambda)^2 = (-2+2\lambda)^2 + (-6+3\lambda)^2 + \lambda^2$;;

$16 - 16\lambda + 4\lambda^2 + 16 - 24\lambda + 9\lambda^2 + 16 - 8\lambda + \lambda^2 = 4 - 8\lambda + 4\lambda^2 + 36 - 36\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^2$;;

$48 - 48\lambda = 40 - 44\lambda$;; $8 = 4\lambda$;; $\underline{\lambda = 2} \Rightarrow \underline{\underline{R(1,\ 2,\ 1)}}$.

****

6ª) La función f(x) es derivable y pasa por el origen de coordenadas. La gráfica de la función derivada es la que puede ver aquí dibujada, siendo f'(x) creciente en los intervalos $(-\infty, -3]$ y $[2, \infty)$.



a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto de abscisa x = 0.

b) Indique las abscisas de los extremos relativos de la función f(x) y clasifique estos extremos.

---

a)

El valor de la pendiente a una función en un punto es el valor de su derivada en ese punto; como se observa, para x = 0 es $f'(0) = m = 1$.

Sabiendo que la función f(x) pasa por O(0, 0) y que la fórmula de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es $y - y_0 = m(x - x_0)$, la ecuación de la recta tangente es la siguiente:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow \underline{\underline{\textit{Tangente}: \; t \equiv x - y = 0}}.$$

b)

La derivada se anula para los valores -3, 1 y 2, en los cuales la función presenta extremos relativos que vamos a diferenciar:

Para x = -3 y x = 2 es f'(x) creciente, por lo cual será $f''(x) > 0$, lo cual significa que la función tiene <u>mínimos relativos para x = -3 y para x = 2</u>.

Para x = 1 es f'(x) decreciente, por lo cual será $f''(x) < 0$, lo cual significa que la función tiene un <u>máximo relativo para x = 1</u>.

****