

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDADES DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sea la recta $r \equiv (x, y, z) = (5 + k, k, -2 - 2k)$ y los puntos $P(1, 0, -1)$ y $Q(2, 1, 1)$.

a) Calcule la ecuación paramétrica de la recta s que pasa por el punto Q y es perpendicular al plano determinado por la recta r y el punto P .

b) Calcule el punto H de la recta r que equidista de los puntos P y Q .

a)

Un vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, 1, -2)$.

Un punto de r es $A(5, 0, -2)$.

Los puntos P y A determinan el vector $\vec{PA} = [A - P] = (4, 0, -1)$.

La expresión general del plano π que determinan la recta r y el punto P es:

$$\pi(P; \vec{v}_r, \vec{PA}) \equiv \begin{vmatrix} x - 1 & y & z + 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad -(x - 1) - 8y - 4(z + 1) + y = 0;$$

$$-x + 1 - 8y - 4z - 4 + y = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 7y + 4z + 3 = 0.$$

Un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, 7, 4)$.

La recta s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + 7\lambda \\ z = 1 + 4\lambda \end{cases}$

b)

Los puntos P y Q determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = (1, 1, 2)$.

El punto medio M del segmento \overline{PQ} es $M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

El plano mediador β del segmento \overline{PQ} tiene la siguiente expresión general:

$$\beta \equiv x + y + 2z + D = 0.$$

Como el plano β contiene al punto M tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z + D = 0 \\ M\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 + D = 0; \quad 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2.$$

El plano mediador es: $\beta \equiv x + y + 2z - 2 = 0$.

El punto H pedido es la intersección del plano β y la recta r:

$$\left. \begin{array}{l} \beta \equiv x + y + 2z - 2 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 5 + k \\ y = k \\ z = -2 - 2k \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (5 + k) + k + 2(-2 - 2k) - 2 = 0;$$

$$5 + k + k - 4 - 4k - 2 = 0; \quad -1 - 2k = 0; \quad 1 + 2k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

$$H \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{H\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}.$$

Otra forma de hacer este ejercicio:

Un punto genérico de la recta r es $C(5 + k, k, -2 - 2k)$.

Por definición del ejercicio: $\overline{CP} = \overline{CQ}$.

$$\begin{aligned} \overline{CP} &= \sqrt{(5 + k - 1)^2 + (k - 0)^2 + (-2 - 2k + 1)^2} = \\ &= \sqrt{(4 + k)^2 + k^2 + (-1 - 2k)^2} = \sqrt{16 + 8k + k^2 + k^2 + 1 + 4k + 4k^2} = \\ &= \sqrt{6k^2 + 12k + 17}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{CQ} &= \sqrt{(5+k-2)^2 + (k-1)^2 + (-2-2k-1)^2} = \\ &= \sqrt{(3+k)^2 + (k-1)^2 + (-3-2k)^2} = \\ &= \sqrt{9+6k+k^2+k^2-2k+1+9+12k+4k^2} = \sqrt{6k^2+16k+19}. \end{aligned}$$

$$\overline{CP} = \overline{CQ} \Rightarrow \sqrt{6k^2+12k+17} = \sqrt{6k^2+16k+19};$$

$$12k+17 = 16k+19; -4k = 2; 2k = -1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

$$H \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{H\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)}.$$

2º) Tres números x, y, z , cumplen dos condiciones: que el primero es la suma de los otros dos, y que el segundo es la suma de la mitad del primero y el doble del tercero.

a) Compruebe que el cálculo de los tres números x, y, z , tiene una infinidad de soluciones.

b) Encuentre una expresión general de las soluciones.

a)

$$\left. \begin{array}{l} x = y + z \\ y = \frac{x}{2} + 2z \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ 2y = x + 4z \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 0 \end{array} \right\}$$

Por ser $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, el rango de la matriz de coeficientes es 2 y el número de incógnitas es 3.

Por tratarse de un sistema homogéneo de dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, según el teorema de Rouché-Fröbenius, el sistema es compatible indeterminado.

Queda probado que el sistema tiene infinitas soluciones.

b)

Parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo $z = \lambda$:

$$\left. \begin{array}{l} x - y = \lambda \\ x - 2y = -4\lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x - y = \lambda \\ -x + 2y = 4\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow y = 5\lambda. \quad x = \lambda + 5\lambda = 6\lambda.$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 5\lambda, \forall \lambda \in R. \\ z = \lambda \end{cases}$$

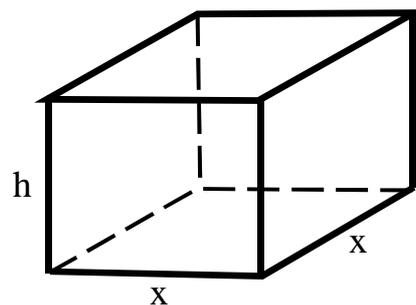
3º) Quiere diseñarse un envase de helado con forma de prisma regular de base cuadrada y con una capacidad de 80 cm^3 . Para elaborar la tapa y la superficie lateral, se usará un determinado material que vale 1 euro/ cm^2 , pero para la base deberá utilizarse un material que es un 50 % más caro.

a) Si x es la medida, en cm, del lado de la base, compruebe que la función que determina el precio del envase es $P(x) = 2,5x^2 + \frac{320}{x}$.

b) Calcule las medidas que debe tener el envase para que el precio sea el mínimo posible.

a)

De la observación de la figura podemos deducir la expresión del volumen, de la cual se expresa la altura en función de x con objeto de expresar el coste como una función de x .



$$V = x \cdot x \cdot h = 80 \Rightarrow h = \frac{80}{x^2}.$$

$$\text{Coste} = C(x, h) = \overbrace{x^2 \cdot 1,5}^{\text{Base}} + \overbrace{x^2 \cdot 1}^{\text{Techo}} + \overbrace{4 \cdot x \cdot h \cdot 1}^{\text{Pared lateral}} = 1,5x^2 + x^2 + 4x \cdot h =$$

$= 2,5x^2 + 4x \cdot h$. Sustituyendo el valor de h obtenido en el volumen:

$$C(x) = 2,5x^2 + 4x \cdot \frac{80}{x^2} = \underline{2,5x^2 + \frac{320}{x}}.$$

b)

Es condición necesaria para que el coste sea mínimo que se anule su primera derivada:

$$C'(x) = 5x - \frac{320}{x^2} = \frac{5x^3 - 320}{x^2} = 0 \Rightarrow 5x^3 - 320 = 0; \quad x^3 - 64 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4.$$

El coste es mínimo cuando el ancho de la base es de 4 centímetros.

$$\text{El coste mínimo es: } C(4) = 2,5 \cdot 4^2 + \frac{320}{4} = 40 + 80 = 120.$$

El coste mínimo es de 120 euros.

4º) Sea la función $f(x) = \text{sen } x$.

a) Calcule la ecuación de las rectas tangentes a la función f en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = \pi$, respectivamente. Encuentre las coordenadas del punto en el que se cortan las dos rectas.

b) Calcule el área de la región limitada por la gráfica de la función f y las rectas tangentes del apartado anterior (en el caso de no haber resuelto el apartado anterior, suponga que las rectas son $y = x$ e $y = -x + \pi$, respectivamente).

a)

Los puntos de tangencia son los siguientes:

$$f(0) = \text{sen } 0 = 0 \Rightarrow \mathbf{O(0, 0)}. \quad f(\pi) = \text{sen } \pi = 0 \Rightarrow \mathbf{A(\pi, 0)}.$$

La pendiente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \cos x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow m_1 = \cos 0 = \mathbf{1} \\ x = \pi \Rightarrow m_2 = \cos \pi = \mathbf{-1} \end{cases}$$

La recta punto-pendiente tiene por expresión: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$t_1 \Rightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow \underline{t_1 \equiv y = x}.$$

$$t_2 \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - \pi) \Rightarrow \underline{t_2 \equiv y = -x + \pi}.$$

La abscisa del punto de corte de las dos tangentes es la solución de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = -x + \pi \end{array} \right\} \Rightarrow x = -x + \pi; \quad 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

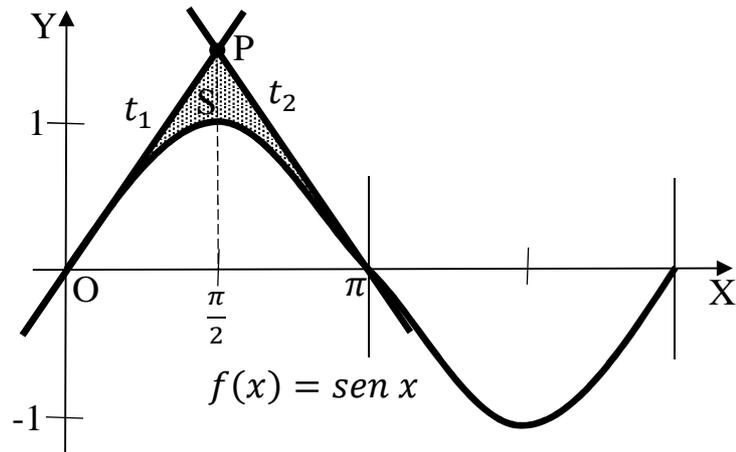
Las rectas tangentes se cortan en el punto $P\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

b)

De la observación de la figura adjunta se deduce que, en el intervalo de la superficie a calcular, las ordenadas correspondientes a las tangentes son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la función. La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [t_1 - f(x)] \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [t_2 - f(x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x - \operatorname{sen} x) \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x + \pi - \operatorname{sen} x) \cdot dx =$$



$$= \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} =$$

$$= \left[\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] - (0 + \cos 0) + \left(-\frac{\pi^2}{2} + \pi\pi + \cos \pi \right) - \left[-\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + \pi \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{8} + 0 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - 1 + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2 - 8}{4}.$$

$$\underline{S = \frac{\pi^2 - 8}{4} u^2 \cong 0,467 u^2.}$$

5º) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Encuentre la única matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ que satisfice $A^2 = A$, y compruebe que A y $A - I$ no son invertibles.

b) Justifique razonadamente que si A es una matriz cuadrada de orden n distinta de la matriz nula, O , y de la matriz identidad, I , y satisfice la igualdad $A^2 = A$, entonces las matrices A y $A - I$ no son invertibles.

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{a}{4} & \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\ \frac{a}{2} + \frac{a}{2} & \frac{a}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+a}{4} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1+a}{4} \end{pmatrix}.$$

$$A^2 = A \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1+a}{4} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1+a}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ a & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1.$$

$$\text{Para } a = 1 \text{ es } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ y } A - I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \underline{A \text{ no es invertible, c. q. j.}}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \underline{A - I \text{ no es invertible, c. q. j.}}$$

b)

Si $A^2 = A$ entonces $A^2 - A = O$, es decir: $A(A - I) = O$.

Ahora vamos a demostrar que ninguna de las dos matrices pueden ser invertibles.

Si A fuera invertible, se cumple que:

$$A^{-1} \cdot A \cdot (A - I) = A^{-1} \cdot O \Rightarrow A = I??$$

Si $A - I$ fuera invertible, se cumple que:

$$A \cdot (A - I)(A - I)^{-1} = O \cdot (A - I)^{-1} \Rightarrow A = O??.$$

Como se observa, en ambos casos se llega a conclusiones absurdas.

6°) Responda a las siguientes cuestiones:

a) Calcule la ecuación cartesiana (es decir, que tiene la forma $Ax + By + Cz = D$) del plano que pasa por el punto $P(0, 0, 1)$ y es perpendicular a los planos de ecuaciones $\pi_1 \equiv 3x + y - z = 1$ y $\pi_2 \equiv x + y + 2z = 5$.

b) Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a su vez perpendicular a un tercer plano π_3 . Explique razonadamente si necesariamente los plano π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.

a)

Los vectores normales de los planos dados son $\vec{v}_1 = (3, 1, -1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, 2)$.

El producto vectorial de dos vectores es perpendicular a cada uno de los vectores que se multiplican:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - j + 3k - k + i - 6j = 3i - 7j + 2k.$$

Un vector del plano φ es $\vec{n}_\varphi = (3, -7, 2)$.

La expresión general del plano φ es $\varphi \equiv 3x - 7y + 2z + D = 0$.

Como el plano φ contiene al punto $P(0, 0, 1)$ tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} \varphi \equiv 3x - 7y + 2z + D = 0 \\ P(0, 0, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 - 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2.$$

$$\underline{\underline{\varphi \equiv 3x - 7y + 2z - 2 = 0.}}$$

b) Suponga que un plano π_1 es perpendicular a un segundo plano π_2 y que el plano π_2 es a su vez perpendicular a un tercer plano π_3 . Explique razonadamente si necesariamente los plano π_1 y π_3 deben ser perpendiculares entre ellos.

Siendo $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ los vectores normales de los planos π_1, π_2, π_3 , respectivamente, y se cumple que $\left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0 \end{array} \right\}$, se tiene que demostrar si, necesariamente, tiene que cumplirse que $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0$.

Utilizando los planos del apartado anterior y llamando: $\pi_1 \equiv 3x + y - z = 1$, $\pi_2 \equiv 3x - 7y + 2z - 2 = 0$ y $\pi_3 \equiv x + y + 2z = 5$, se cumple que:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \text{ por ser } \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = (3, 1, -1) \cdot (3, -7, 2) = 9 - 7 - 2 = 0.$$

$\pi_2 \perp \pi_3$ por ser $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = (3, -7, 2) \cdot (1, 1, 2) = 3 - 7 + 4 = 0$.

Sin embargo los planos π_1 y π_3 no son perpendiculares, por ser:

$\pi_1 \perp \pi_3$ por ser $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = (3, 1, -1) \cdot (1, 1, 2) = 3 + 1 - 2 \neq 0$.

Todo lo anterior demuestra que:

La perpendicularidad de planos no cumple la propiedad transitiva.
