

**PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)****UNIVERSIDADES DE CATALUÑA****JUNIO – 2016**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

**MATEMÁTICAS II****Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} 2x + 4y + 4z = 4k - 7 \\ 2x - ky = -1 \\ -2x = k + 1 \end{cases}$  :

a) Discuta el sistema para los diferentes valores del parámetro k.

b) Resuelva el sistema para el caso de  $k = 0$ .

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 4k - 7 \\ 2 & -k & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & k + 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -k & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -8k = 0 \Rightarrow k = 0.$$

$$\underline{\text{Para } k \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

$$\text{Para } k = 0 \text{ es } A' = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & -7 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = -F_3\} \Rightarrow \text{Rang. } A' = 2.$$

$$\underline{\text{Para } k \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } A = \text{Rang } A' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$$

b)

Resolvemos el sistema para  $k = 0$ , que es compatible indeterminado.

El sistema resulta  $\begin{cases} 2x + 4y + 4z = -7 \\ 2x = -1 \\ -2x = 1 \end{cases}$ , cuyas soluciones son:

$$x = -\frac{1}{2}; \quad z = \lambda; \quad y = \frac{-7-2x-4z}{4} = \frac{-7+1-4z}{4} = -\frac{3}{2} - \lambda.$$

Solución:  $x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{3}{2} - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.$

\*\*\*\*\*

www.yoquieroaprobar.es

2º) En  $R^3$ , sea la recta  $r \equiv (x, y, z) = (1 + \lambda, \lambda, 1 - \lambda)$  y el plano  $\pi$  cuya ecuación general es  $\pi \equiv 2x - y + z = -2$ .

a) Determine la posición relativa del plano  $\pi$  y la recta  $r$ .

b) Calcule la distancia entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

Nota: puede calcularse la distancia de un punto de coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  al plano de ecuación  $Ax + By + Cz + D = 0$  con la expresión  $\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ .

a)

Un vector director de la recta  $r$  y un vector normal del plano  $\pi$  son, respectivamente:  $\vec{v}_r = (1, 1, -1)$  y  $\vec{n} = (2, -1, 1)$ .

Los vectores  $\vec{v}_r$  y  $\vec{n}$  son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; teniendo en cuenta que:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n} = (1, 1, -1) \cdot (2, -1, 1) = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_r \perp \vec{n}.$$

La recta  $r$  y el plano  $\pi$  son paralelos.

b)

La distancia entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$  es la misma que la de un punto de la recta  $r$  al plano; un punto de  $r$  es  $P(1, 0, 1)$ .

Aplicando la fórmula recomendada al plano  $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$  y al punto  $P(1, 0, 1)$ :

$$d(\pi, r) = d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 0 + 1 + 2|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{6}}.$$

La distancia de la recta  $r$  al plano  $\pi$  es  $\frac{5\sqrt{6}}{6}$  unidades.

\*\*\*\*\*

3º) Considere al función  $f(x) = x \cdot e^{x-1}$ .

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función  $f$  en el punto de abscisa  $x = 1$ .

b) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f$ .

-----

a)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{x-1} + x \cdot e^{x-1} = e^{x-1} \cdot (1 + x).$$

$$f'(1) = m \Rightarrow e^0 \cdot (1 + 1) = 1 \cdot 2 = 2 \Rightarrow m = 2.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f(1) = 1 \cdot e^{1-1} = e^0 = 1 \Rightarrow P(1, 1).$$

Ecuación de la recta punto-pendiente:  $y - y_0 = m(x - x_0)$ ; la tangente es:

$$y - 1 = 2 \cdot (x - 1) = 2x - 2 \Rightarrow \underline{t \equiv 2x - y - 1 = 0}.$$

b)

Una función es creciente o decreciente en un punto cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente, en ese punto.

$$f'(x) = e^{x-1} \cdot (1 + x) = 0 \Rightarrow x = -1.$$

Teniendo en cuenta que  $e^{x-1} > 0, \forall x \in R$ , y que el dominio de la función es  $R$ , los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x > -1.}$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x < -1.}$$

\*\*\*\*\*

4º) Responda a las cuestiones siguientes:

a) Calcule todas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$  que satisfagan la igualdad  $A^2 + A = 2I$ , siendo I la matriz identidad,  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

b) Justifique que si A es una matriz cuadrada que cumple  $A^2 + A = 2I$ , A es invertible y calcule la expresión de  $A^{-1}$  en función de las matrices A e I.

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^2 + A = 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I.$$

$$\underline{A^2 + A = 2I, \forall m \in \mathbb{R}.$$

Satisfacen la igualdad todas las matrices de la forma  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & -2 \end{pmatrix}$ .

b)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

Sabiendo que el determinante de la suma de dos matrices es la suma de los determinantes de las matrices y que, el determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de las matrices:

$$A^2 + A = 2I \Rightarrow |A^2 + A| = |2I|; |A^2| + |A| = 2^2 \cdot |I|; |A \cdot A| + |A| = 4;$$

$$|A| \cdot |A| + |A| = 4 \Rightarrow |A| \neq 0.$$

Queda justificado que la matriz A es invertible.

$A^2 + A = 2I$ . Multiplicando por la derecha por  $A^{-1}$ :

$$A \cdot A \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} = 2I \cdot A^{-1}; A \cdot I + I = 2 \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A + I)}.$$

\*\*\*\*\*

5º) Considere el tetraedro de vértices  $A(x, 0, 1)$ ,  $B(0, x, 1)$ ,  $C(3, 0, 0)$  y  $D(0, x, 0)$  siendo  $0 < x < 3$ .

a) Compruebe que el volumen del tetraedro viene dado por  $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$ .

b) Determine el valor de  $x$  para que el volumen sea máximo y calcule ese volumen.

Nota: Puede calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D viene dado por la expresión  $\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}|$ .

a)

$$\overrightarrow{AB} = [B - A] = [(0, x, 1) - (x, 0, 1)] = (-x, x, 0).$$

$$\overrightarrow{AC} = [C - A] = [(3, 0, 0) - (x, 0, 1)] = (3 - x, 0, -1).$$

$$\overrightarrow{AD} = [D - A] = [(0, x, 0) - (x, 0, 1)] = (-x, x, -1).$$

Haciendo uso de la fórmula dada:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -x & x & 0 \\ 3-x & 0 & -1 \\ -x & x & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot [x^2 - x^2 + x(3-x)].$$

Queda comprobado que el volumen del tetraedro es  $V(x) = \frac{1}{6}(-x^2 + 3x)$ .

b)

El volumen es máximo cuando se anula su primera derivada y su segunda derivada es negativa para los valores que anulan la primera:

$$V'(x) = \frac{1}{6}(-2x + 3) = 0 \Rightarrow -2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$V''(x) = \frac{1}{6}(-2) = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x = \frac{3}{2}.$$

$$V\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{6} \left[ -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{6} \cdot \left( -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{8}.$$

El volumen máximo es para  $x = \frac{3}{2}$  y su valor es  $\frac{3}{8} u^3$ .

\*\*\*\*\*

6°) Dadas las parábolas  $f(x) = x^2 + k^2$  y  $g(x) = -x^2 + 9k^2$ .

a) Calcule las abscisas, en función de  $k$ , de los puntos de corte de las parábolas.

b) Calcule el valor del parámetro  $k$  para que el área comprendida entre las parábolas sea de 576 unidades cuadradas.

a)

Las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualdad de sus expresiones:

$$x^2 + k^2 = -x^2 + 9k^2; 2x^2 - 8k^2 = 0; 2(x^2 - 4k^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2k \\ x_2 = 2k \end{cases}.$$

b)

Las parábolas  $f(x) = x^2 + k^2$  y  $g(x) = -x^2 + 9k^2$  son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Por ser las ordenadas de la parábola cóncava ( $\cap$ )  $g(x) = -x^2 + 9k^2$  mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola convexa ( $\cup$ )  $f(x) = x^2 + k^2$  en el intervalo del área a calcular y teniendo en cuenta su simetría, se deduce que:

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \int_0^{2k} [(-x^2 + 9k^2) - (x^2 + k^2)] dx = 2 \cdot \int_0^{2k} (-2x^2 + 8k^2) \cdot dx = \\ &= 2 \cdot \left[ -\frac{2x^3}{3} + 8k^2x \right]_0^{2k} = 2 \cdot \left\{ \left[ -\frac{2(2k)^3}{3} + 8k^2 \cdot 2k \right] - 0 \right\} = 2 \cdot \left( 16k^3 - \frac{16k^3}{3} \right) = \\ &= 32k^3 - \frac{32k^3}{3} = \frac{96k^3 - 32k^3}{3} = \frac{64k^3}{3}. \end{aligned}$$

$$S = 576 = \frac{64k^3}{3}; 1.728 = 64k^3 \Rightarrow k^3 = \frac{1.728}{64} = 27 = 3^3 \Rightarrow \underline{k = 3}.$$

\*\*\*\*\*