PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} \lambda x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2\lambda x - y + 5\lambda z = 30 \end{cases}$:

$a)$ Estudie para que valores del parámetro λ el sistema es incompatible.

$b)$ Resuelva el sistema para el caso de $\lambda = 1$.

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda & 30 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2\lambda & -1 & 5\lambda \end{vmatrix} = 5\lambda^2 + 2\lambda + 2\lambda + \lambda = 0;\ 5\lambda^2 + 5\lambda = 0;\ \lambda^2 + \lambda = 0;$$

$\lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.$

$$Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$$

$$Para\ \lambda = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & -5 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & 30 \end{vmatrix} = -30 - 20 - 10 = -60 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ \lambda = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & -1 & 0 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 10 \\ -1 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 30 + 10 + 30 = 60 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} \lambda \neq -1 \\ \lambda \neq 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ y + z = 10 \\ 2x - y + 5z = 30 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 10 & 1 & 1 \\ 30 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{5 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1} = \frac{10+30+30-50}{5+5} = \frac{20}{10} = 2.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 10 & 1 \\ 2 & 30 & 5 \end{vmatrix}}{10} = \frac{50+20-30}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 10 \\ 2 & -1 & 30 \end{vmatrix}}{10} = \frac{30+20+10}{10} = \frac{60}{10} = 6.$$

$$\underline{Solución: x = 2, y = 4, z = 6.}$$

****

2º) Considere los planos $\pi_1 \equiv 5x - y - 7z = 1$ y $\pi_2 \equiv 2x + 3y + z = 5$.

a) Determine la ecuación general $(Ax + By + Cz + D = 0)$ del plano β que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a los planos π_1 y π_2.

b) Calcule el ángulo que forman los planos π_1 y π_2.

----

a)

Los vectores normales de los planos son $\overrightarrow{n_1} = (5, -1, -7)$ y $\overrightarrow{n_2} = (2, 3, 1)$.

El plano β, por ser perpendicular a los planos π_1 y π_2, tiene como vectores directores a sus vectores normales; su expresión general es la siguiente:

$$\beta(O;\ \overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & -1 & -7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ -x - 14y + 15z + 2z + 21x - 5y = 0;$$

$$\underline{\beta \equiv 20x - 19y + 17z = 0.}$$

b)

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales.

Por el concepto de producto escalar:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = |\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|} = \frac{(5,-1,-7)\cdot(2,3,1)}{\sqrt{5^2+(-1)^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+1^2}} =$$

$$= \frac{10-3-7}{\sqrt{25+1+49}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{0}{\sqrt{75}\cdot\sqrt{14}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°.$$

$$\underline{Los\ planos\ \pi_1\ y\ \pi_2\ son\ perpendiculares.}$$

****

3º) Considere la función $f(x) = \frac{1}{x^2-k}$, siendo k un parámetro real distinto de 0. Para los diferentes valores de k:

a) Calcule el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

b) Determine los máximos y mínimos relativos de $f(x)$.

----

a)

$$x^2 - k = 0; \;\; x^2 = k \Rightarrow x_1 = -\sqrt{k}, x_2 = \sqrt{k}.$$

$$\underline{D(f) \Rightarrow R - \left\{-\sqrt{k}, \sqrt{k}\right\}}.$$

Asíntotas verticales: Son de la forma $x = k$; son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{Asíntotas\ verticales: x = -\sqrt{k}\ y\ x = \sqrt{k}}.$$

Horizontales: Son de la forma $y = k$; son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a $\pm\infty$:

$$y = k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-k} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ de\ abscisas)\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada. Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: según que sea negativa o positiva para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo o de un mínimo, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-k)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-k)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0; \;\; x = 0.$$

$$f''(x) = \frac{-2\cdot(x^2-k)^2 + 2x\cdot[2\cdot(x^2-k)\cdot 2x]}{(x^2-k)^4} = \frac{-2\cdot(x^2-k)+8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{-2x^2+2k+8x^2}{(x^2-k)^3} = \frac{6x^2+2k}{(x^2-k)^3}.$$

$$f''(0) = \frac{0+2k}{(0-k)^3} = -\frac{2}{k^2} < 0, \forall k \in R, k \neq 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{0-k} = -\frac{1}{k} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(0, -\frac{1}{k}\right)}.$$

****

4º) Sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + ay = 1 \\ x + az = 1 \\ y + z = a \end{cases}$ tiene una única solución:

a) Compruebe que $a \neq 0$.

b) Encuentre la solución del sistema en función del parámetro a.

----

a)

Según el teorema de Rouché-Fröbenius, un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas es compatible determinado cuando el rango de la matriz de coeficientes es tres, o sea, que su determinante es distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a - a = -2a \neq 0 \Rightarrow a \neq 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ el\ sistema\ es\ compatible\ determinado\ \forall a \in R, a \neq 0.}$

b)

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \{Cambiando\ filas\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & a & -a & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - aF_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -2a & -a^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{a}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a \end{pmatrix} \Rightarrow 2z = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{a}{2};\ \ y + z = a;\ \ y + \frac{a}{2} = a \Rightarrow y = \frac{a}{2};\ \ x + az = 1 \Rightarrow x = 1 - \frac{a^2}{2} = \frac{2-a^2}{2}.$$

$$\underline{Solución: x = \frac{2-a^2}{2}, y = \frac{a}{2}, z = \frac{a}{2}, \forall a \in R.}$$

****

5º) Considere las matrices cuadradas de orden 2 de la forma $M = \begin{pmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{pmatrix}$, siendo x e y números reales.

$a)$ Compruebe que la matriz M es siempre invertible, independientemente de los valores de x e y.

$b)$ Para $x = 1, y = -1$, calcule M^{-1}.

$a)$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} x & -1 \\ y^2+1 & x \end{vmatrix} = x^2 + y^2 + 1 \neq 0, \forall x, y \in R$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ M\ es\ invertibla\ \forall x, y \in R.}$$

$b)$

Para $x = 1, y = -1$ es $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3.$ $\quad M^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ $\quad Adj.\,de\ M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$M^{-1} = \frac{Adj.de\ M^t}{|M|} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$

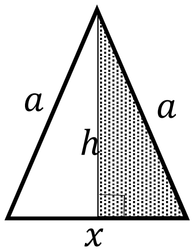
$$\underline{M^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

****

6º) Considere un cono de 120 cm³ de volumen que tiene una altura h, un radio de la base x y una generatriz a.

a) Comprueba que $a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2$.

b) Calcule la altura del cono que tiene la generatriz de longitud mínima.
Nota: Recuerde que el volumen del cono es un tercio del volumen del cilindro recto que tiene el mismo radio de la base y la misma altura.



$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot h = 120; \quad \frac{\pi \cdot x^2 \cdot h}{12} = 120 \Rightarrow x^2 = \frac{1.440}{\pi \cdot h}.$$

$$a^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + h^2 = \frac{x^2}{4} + h^2 = \frac{\frac{1.440}{\pi \cdot h}}{4} + h^2 = \frac{360}{\pi \cdot h} + h^2.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ a^2 = \frac{360}{\pi} \cdot \frac{1}{h} + h^2.}$$

b)

La condición necesaria para que la generatriz a sea mínima es que se anule su primera derivada.

$$a_{(h)} = \sqrt{\frac{360}{\pi \cdot h} + h^2} = \sqrt{\frac{360 + \pi \cdot h^3}{\pi \cdot h}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{360 + \pi \cdot h^3}{h}}.$$

$$a'_{(h)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\frac{3\pi \cdot h^2 \cdot h - (360 + \pi \cdot h^3) \cdot 1}{h^2}}{2 \cdot \sqrt{\frac{360 + \pi \cdot h^3}{h}}} = 0 \Rightarrow 3\pi \cdot h^2 \cdot h - (360 + \pi \cdot h^3) \cdot 1 = 0;$$

$$3\pi \cdot h^3 = 360 + \pi \cdot h^3; \quad 2\pi \cdot h^3 = 360; \quad h^3 = \frac{180}{\pi} \Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}.$$

$$\underline{h = \sqrt[3]{\frac{180}{\pi}} \cong 3,86\ cm.}$$

****