PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDADES DE CATALUÑA

JUNIO – 2018

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $M \cdot N$ y compruebe que la matriz resultante no es invertible.

b) Encuentre los valores de t para los que la matriz $N \cdot M$ es invertible.

----

a)

$$M \cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{pmatrix}.$$

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M \cdot N| = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2-t & t^2 & 2t-2 \end{vmatrix} = t(2-t) - t^2 + t(2t-2) =$$

$$= 2t - t^2 - t^2 + 2t^2 - 2t = 0.$$

$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ matriz\ M \cdot N\ no\ es\ invertible.}$

b)

$$N \cdot M = \begin{pmatrix} -1 & t & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ t & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|N \cdot M| = \begin{vmatrix} 2t-1 & 2-t \\ 1-t & 0 \end{vmatrix} = -(1-t)(2-t) = -(2-t-2t+t^2) =$$

$= -t^2 + 3t - 2.$

$$|N \cdot M| = 0 \Rightarrow -t^2 + 3t - 2 = 0; \;\; t^2 - 3t + 2 = 0; \;\; x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} =$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2.$$

$$\underline{La\ matriz\ N \cdot M\ es\ ivertible\ \forall t \in R - \{1, 2\}}.$$

****

2º) Sea r la recta que pasa por los puntos $A(0,1,1)$ y $B(1,1,-1)$.

a) Encuentre la ecuación paramétrica de la recta r.

b) Calcular todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.
Nota: Puede calcular la distancia de un punto de coordenadas $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano de ecuación $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ con la expresión $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

----

a)

Los puntos A y B determinen el vector $\overrightarrow{AB} = [B - A] = (1, 0, -2)$.

Considerando, por ejemplo el punto A, unas ecuaciones paramétricas de r son:

$$\underline{r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}}.$$

b) Calcular todos los puntos de la recta r que están a la misma distancia de los planos $\pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\pi_2 \equiv x - z = 1$.

Un punto genérico de r es $P(\lambda, 1, 1 - 2\lambda)$.

$$d(P, \pi_1) = \frac{|1 \cdot \lambda + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1 - 2\lambda) + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{|\lambda + 1 + 2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{2}}.$$

$$d(P, \pi_2) = \frac{|1 \cdot \lambda + 0 \cdot 1 - 1 \cdot (1 - 2\lambda) - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|\lambda + 0 - 1 + 2\lambda - 1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{|3\lambda - 2|}{\sqrt{2}}.$$

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \Rightarrow \frac{|\lambda + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|3\lambda - 2|}{\sqrt{2}}; \;\; |\lambda + 3| = |3\lambda - 2| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda + 3 = 3\lambda - 2 \\ \lambda + 3 = -3\lambda + 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2\lambda = 5 \\ 4\lambda = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{4}.$$

$$P_1\left(\frac{5}{2}, 1, 1 - 2 \cdot \frac{5}{2}\right) \Rightarrow \underline{P_1\left(\frac{5}{2}, 1, -4\right)}.$$

$$P_2\left[-\frac{1}{4}, 1, 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)\right] \Rightarrow \underline{P_2\left(-\frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}\right)}.$$

****

3º) Sea la función $f(x) = x^3 - x^2$.

a) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica y que sea paralela a la recta de ecuación $x + 3y = 0$.

b) Calcule, si los hay, los puntos de la gráfica en la que la función presenta un máximo o mínimo relativo o un punto de inflexión.

----

a)

La recta $x + 3y = 0$ también puede expresarse de la forma $y = -\frac{1}{3}x$, cuya pendiente es $m = -\frac{1}{3}$.

La recta tangente, por ser paralela a la recta dada, tiene su misma pendiente.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \;\Rightarrow\; m = f'(x) = 3x^2 - 2x = -\frac{1}{3};\;\; 9x^2 - 6x + 1 = 0;$$

$$(3x - 1)^2 = 0;\;\; 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

El punto de tangencia es el siguiente:

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{1-3}{27} = -\frac{2}{27} \Rightarrow P\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{27}\right).$$

La expresión de la recta que pasa por un punto conocida la pendiente es la siguiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$.

$$y + \frac{2}{27} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{9};\;\; 27y + 2 = -9x + 3.$$

La ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente:

$$\underline{Tangente: t \equiv 9x + 27y - 1 = 0.}$$

b)

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x \,. \qquad\qquad f''(x) = 6x - 2 \,.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x = 0; \;\; x(3x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = \frac{2}{3}.$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 - 2 = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 0.$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Máximo: O(0,0)}.$$

$$f''\left(\tfrac{2}{3}\right) = 6 \cdot \frac{2}{3} - 2 = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = \frac{2}{3}.$$

$$f\left(\tfrac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27} - \frac{4}{9} = \frac{8-12}{27} = -\frac{4}{27} \Rightarrow \underline{Mínimo: A\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{27}\right)}.$$

Para que una función polinómica tenga un punto de inflexión son condiciones necesarias que se anule su segunda derivada y sea distinta de cero la tercera derivada para los valores que anulan a la segunda.

$$f''(x) = 6x - 2. \qquad\qquad f'''(x) = 6 \neq 0.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 2 = 0; \;\; 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{1-3}{27} = -\frac{2}{27} \Rightarrow \underline{P.I.: B\left(\frac{1}{3}, \frac{-2}{27}\right)}.$$

****

4º) Considere los puntos $P(3,-2,1), Q(5,0,3), R(1,2,3)$ y la recta r que tiene por ecuación $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$.

a) Determine la ecuación general (es decir, que tiene la forma $Ax+By+Cz=D$) del plano γ que pasa por $P\ y\ Q$ y es paralela a la recta r.

b) Dados el plano $\pi \equiv x+2y+mz=7$ y el plano β que pasa por $P, Q\ y\ R$, encuentre m para que sean paralelos y no coincidentes.

----

a)

Los puntos $P(3,-2,1)\ y\ Q(5,0,3)$ determinan el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,2,2)$.

Un vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2y+3z-5=0 \end{cases}$ es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$ y $\overrightarrow{n_2}=(0,2,3)$.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=3i+2k-3j=3i-3j+2k \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(3,-3,2).$$

$$\gamma\left(Q;\ \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{v_r},\right) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$4(x-5)+6y-6(z-3)-6(z-3)+6(x-5)-4y=0;$

$10(x-5)+2y-12(z-3)=0;\ \ 5(x-5)+y-6(z-3)=0;$

$5x-25+y-6z+18=0\ \Rightarrow\ \underline{\gamma \equiv 5x+y-6z-7=0}.$

b)

Los puntos $P(3,-2,1)\ y\ R(1,2,3)$ determinan el vector $\overrightarrow{PR}=(-2,4,2)$.

$$\beta\left(Q;\ \overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=0;$$

$4(x-5)-4y+8(z-3)+4(z-3)-8(x-5)-4y=0;$

$-4(x-5)-8y+12(z-3)=0;\ \ (x-5)+2y-3(z-3)=0;$

$x-5+2y-3z+9=0\ \ \Rightarrow\ \ \beta \equiv x+2y-3z=-4.$

Si los planos $\pi \equiv x + 2y + mz = 7$ y $\beta \equiv x + 2y - 3z = -4$ tienen que ser paralelos y no coincidentes tienen que tener proporcionales sus respectivos coeficientes de x, y, z y no ser proporcionales sus términos independientes:

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{m}{-3} \neq \frac{7}{-4} \;\Rightarrow\; \underline{m = -3}.$$

****

5º) Sea la función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$.

a) Compruebe que la función $f(x)$ cumple el enunciado del teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$ y que, por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene alguna solución en el intervalo $(0, 2)$. Compruebe que $x = 1$ es una solución de la ecuación $f(x) = 0$ y razone, teniendo en cuenta el signo de $f'(x)$, que la solución es única.

b) A partir del resultado final del apartado anterior, encuentre el área limitada por la gráfica de la función $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

----

a)

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

La función $f(x) = \sqrt{x} + x - 2$ es continua en su dominio, $D(f) = [0, +\infty)$, por ser la suma de tres funciones continuas, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano en el intervalo $[0, 2]$:

$$f(0) = \sqrt{0} + 0 - 2 = -2 < 0.$$

$$f(2) = \sqrt{2} + 2 - 2 = \sqrt{2} > 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ la\ función\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ una\ raíz\ en\ (0, 2).}$$

$$f(1) = \sqrt{1} + 1 - 2 = 1 - 1 = 0.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ x = 1\ es\ raíz\ de\ la\ función\ f(x).}$$

Se pide comprobar que la raíz es única. Se usa el método de reducción al absurdo.

Si tuviera otra raíz le sería aplicable el teorema de Rolle a la función en el intervalo considerado.

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \neq 0, \forall x \in R.$$

Al no existir ningún valor real tal que $f'(x) = 0$:

$$\underline{Queda\ demostrado\ que\ f(x)\ solamente\ tiene\ una\ raíz\ real.}$$

$b)$

Para el cálculo del área pedida debe tenerse en cuenta que en el intervalo $(0, 1)$ las ordenadas de la función son negativas.

$$S = -\int_0^1 f(x)\, dx = \int_1^0 f(x)\, dx = \int_1^0 \left(\sqrt{x} + x - 2\right) \cdot dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^0 =$$

$$= \left[\frac{2x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^0 = 0 - \left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{1}}{3} + \frac{1^2}{2} - 2 \cdot 1\right) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{-4-3+12}{6} = \frac{5}{6}.$$

$$\underline{S = \frac{5}{6}\, u^2 \cong 0{,}833\, u^2}.$$

****

6º) Unos estudiantes de bachillerato han programado una hoja de cálculo como el de la figura siguiente que da la solución de un sistema de ecuaciones compatible determinado de una manera automática:

$$\left|\begin{array}{cccc} \overbrace{\begin{matrix} x & y & z \end{matrix}}^{} & & & \\ 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & \boxed{2} & 6 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} \boxed{x = 1} \\ \boxed{y = -2} \\ \boxed{z = 3} \end{array}$$

a) Escriba el sistema y compruebe que los valores propuestos como solución son correctos.

b) ¿Qué valor debería ponerse en lugar de 2 que está enmarcado en la imagen, correspondiente a la celda a_{33}, para que el sistema sea incompatible?

----

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\left.\begin{array}{r} x + 2y - z = -6 \\ x - y - 2z = -3 \\ 2x + y + 2z = 6 \end{array}\right\}}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{12+3-24-6-12+12}{-2-1-8-2+2-4} = \frac{15-30}{-15} = \frac{-15}{-15} = 1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-6-6+24-6+12+12}{-15} = \frac{24-6+12}{-15} = \frac{30}{-15} = -2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-6-6-12-12+3-12}{-15} = \frac{-45}{-15} = 3.$$

$$\underline{\textit{Queda comprobado que la solución es } x = -1, y = -2 \textit{ y } z = 3.}$$

b)

Supóngase que el valor a determinar es n.

Procediendo por el método de Gauss:

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & n & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & n+2 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -6 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & n+3 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow n + 3 = 0 \Rightarrow n = -3.$$

Según el teorema de Ruoché-Fröbenius:

$\underline{Para\ n = -3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$

****