

PRUEBA DE ACCESO (EBAU)**UNIVERSIDADES DE CATALUÑA****SEPTIEMBRE – 2019**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Responda a CINCO de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre qué quiere hacer y por qué. Puede utilizar calculadoras, pero no se autorizará el uso de calculadoras u otros aparatos que tengan información almacenada o que puedan transmitir o recibir información.

1º) Considere las rectas $y = x$ e $y = 2x$, y la parábola $y = x^2$.

a) Calcule los puntos de intersección entre las gráficas de las diferentes funciones y haz un esbozo de la región delimitada por estas gráficas.

b) Calcule el área de la región plana del apartado anterior.

a)

Las rectas $y = x$ e $y = 2x$ se cortan en el origen de coordenadas.

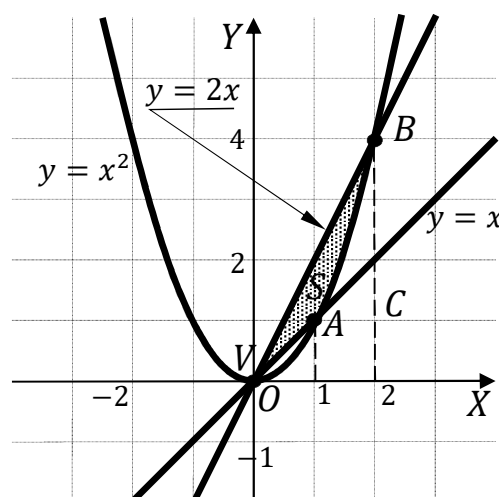
Los puntos de corte de cada una de las rectas con la parábola son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} y = x \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = x^2; \quad x^2 - x = 0;$$

$$x(x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = 1 \rightarrow A(1, 1) \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = x^2; \quad x^2 - 2x = 0;$$

$$x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0, 0) \\ x_2 = 2 \rightarrow B(2, 4) \end{cases}$$



La representación gráfica de la situación se indica en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 (2x - x) \cdot dx + \int_1^2 (2x - x^2) \cdot dx = \int_0^1 x \cdot dx + \int_1^2 (2x - x^2) \cdot dx = \\
 &= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \left(\frac{1^2}{2} - 0 \right) + \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{2} + \left[\left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(1^2 - \frac{1^3}{3} \right) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} + 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} = 3 + \frac{1}{2} - \frac{7}{3} = \frac{18+3-14}{6} = \frac{7}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\underline{S = \frac{7}{6} u^2 \cong 1,17 u^2.}$$

2º) Considere la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Hallar los valores reales del parámetro real a para los que la matriz M es invertible.

b) Discute la posición relativa de los planos $\pi_1 \equiv x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 \equiv x + ay + z = 1$ y $\pi_3 \equiv 4x + 3ay + z = 3$ en función de los valores del parámetro a .

a)

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a + 3a(a-1) - 4a(a-1) - 3a =$$

$$= -2a - a(a-1) = 0; \quad 2a + a(a-1) = 0; \quad 2a + a^2 - a = 0; \quad a^2 + a = 0;$$

$$a(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

M es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

b)

Los planos $\pi_1 \equiv x + (a-1)z = 0$, $\pi_2 \equiv x + ay + z = 1$ y $\pi_3 \equiv 4x + 3ay + z = 3$ determinan el sistema $\left. \begin{matrix} x + (a-1)z = 0 \\ x + ay + z = 1 \\ 4x + 3ay + z = 3 \end{matrix} \right\}$, cuyas matrices de coeficientes y ampliada son $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 4 & 3a & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Nótese que la matriz M es la misma del apartado anterior.

Según que los rangos de estas matrices, la posición relativa de los planos son las siguientes:

1º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en un punto.}$

2º. -- $\text{Rang } M = 2; \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Los planos son secantes dos a dos.}$

3º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta.}$

4º. -- $\text{Rang } M = 1; \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los planos son paralelos.}$

5º. -- $\text{Rang } M = \text{Rang } M' = 1 \Rightarrow \text{Los planos son coincidentes.}$

$$\text{Rang } M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 3a & 1 \end{vmatrix} = a(a+1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -1.$$

Si $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en un punto.}$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 - 1 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

Si $a = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2, \text{Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Los planos son secantes dos a dos.}$

$$\text{Para } a = -1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_4\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2$$

Si $a = -1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 \Rightarrow \text{Los planos se cortan en una recta.}$

3º) Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

b) Justifique que si el producto de dos matrices cuadradas no nulas tiene por resultado la matriz nula, entonces el determinante de ambas matrices debe ser cero.

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}}}.$$

b)

Sean las matrices A y B, y suponemos que, por ejemplo, $|B| \neq 0$, lo que implica que la matriz B no es nula y tiene inversa.

Siendo $A \cdot B = O$ (matriz nula), se pueden multiplicar los dos términos por la derecha por B^{-1} , que existe, resultando:

$A \cdot B \cdot B^{-1} = O \cdot B^{-1} = O \Rightarrow A = 0$, lo cual contradice que las dos matrices son cuadradas y no nulas.

Por lo anterior se concluye que:

$$\underline{\underline{A \cdot B = O \Rightarrow |A| \neq 0 \text{ y } |B| \neq 0, \text{ como queríamos justificar.}}}$$

4º) Considera la función $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica en aquellos puntos en la que la recta tangente es horizontal.

b) Calcule las coordenadas del punto de la gráfica de la función $f(x)$ en que la pendiente de la recta tangente es máxima.

a)

Si la recta tangente es horizontal su pendiente es $m = 0$.

El valor de la pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$m = f'(x) = \frac{-1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

$$m = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = 0; -2x = 0 \Rightarrow x = 0.$$

$$f(0) = \frac{1}{1+0^2} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \text{Punto de tangencia} \Rightarrow P(0, 1).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, 1)$ con $m = 0$ es:

$$y - 1 = 0 \cdot (x - 0) = 0.$$

La recta tangente pedida es $t \equiv y - 1 = 0$.

b)

Una función tiene un máximo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

La primera derivada de $f'(x)$ es $f''(x)$.

$$f''(x) = \frac{-2 \cdot (1+x^2)^2 - (-2x) \cdot [2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = \frac{-2 \cdot (1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2(3x^2 - 1)}{(1+x^2)^3} = 0; 3x^2 - 1 = 0; x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

La segunda derivada de $f'(x)$ es $f'''(x)$.

$$f'''(x) = \frac{6x \cdot (1+x^2)^3 - (6x^2 - 2) \cdot [3 \cdot (1+x^2)^2 \cdot 2x]}{(1+x^2)^6} = \frac{6x \cdot (1+x^2) - (6x^2 - 2) \cdot 6x}{(1+x^2)^4} =$$

$$= \frac{6x \cdot (1+x^2-6x^2+2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x \cdot (3+5x^2)}{(1+x^2)^4}.$$

$$f''' \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{6 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \left(3+5 \cdot \frac{1}{3} \right)}{\left(1+\frac{1}{3} \right)^4} > 0 \Rightarrow \text{Mínimo para } x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f''' \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \cdot \left(3+5 \cdot \frac{1}{3} \right)}{\left(1+\frac{1}{3} \right)^4} < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$f \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

El punto pedido es $Q \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4} \right)$.

5º) Sean P, Q y R los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x + 4y + 2z = 4$ con los ejes de coordenadas OX, OY y OZ, respectivamente.

a) Calcule los puntos P, Q y R y el perímetro del triángulo de vértices P, Q y R.

b) Calcule al área del triángulo de vértices P, Q y R.

Nota: Para el cálculo del área del triángulo definido por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ puede utilizarse la fórmula $S = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{v} \times \vec{w}\|$, donde $\vec{v} \times \vec{w}$ es el producto vectorial de los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

a)

$$\pi \equiv x + 4y + 2z = 4 \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow \underline{P(4, 0, 0)} \\ OY \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow 4y = 4 \Rightarrow \underline{Q(0, 1, 0)} \\ OZ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2z = 4 \Rightarrow \underline{R(0, 0, 2)} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PQ} = [Q - P] = [(0, 1, 0) - (4, 0, 0)] = (-4, 1, 0).$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

$$\overrightarrow{PR} = [R - P] = [(0, 0, 2) - (4, 0, 0)] = (-4, 0, 2).$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}.$$

$$\overrightarrow{QR} = [R - Q] = [(0, 0, 2) - (0, 1, 0)] = (0, -1, 2).$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}.$$

$$\underline{\underline{Perímetro = p = (\sqrt{17} + \sqrt{20} + \sqrt{5}) u \cong 10,831 u.}}$$

b)

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |2i + 4k + 8j| =$$

$$= |i + 4j + 2k| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}.$$

$$\underline{\underline{S_{PQR} = \sqrt{21} u^2 \cong 4,583 u^2.}}$$

6º) Considera la función $f(x) = \frac{Lx}{x}$.

a) Calcule el dominio de la función f , los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas, y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f .

b) Calcule el área de la región del plano determinada por la gráfica de la función f , las rectas $x = 1$ y $x = e$, y el eje de abscisas.

a)

Sabiendo que los números negativos no tienen logaritmo: $D(f) \Rightarrow (0, +\infty)$.

Del dominio de la función se deduce que la función f no corta al eje Y .

Eje $X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow Lx = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \underline{P(1, 0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su derivada es positiva o negativa, respectivamente: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - Lx \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - Lx}{x^2}$.

Por ser $x^2 > 0, \forall x \in D(f)$, la derivada es positiva o negativa cuando lo sea el numerador $1 - Lx$: $1 - Lx = 0 \Rightarrow x = e$.

Crecimiento: $f'(x) > 0 \Rightarrow x < e$.

Decrecimiento: $f'(x) < 0 \Rightarrow x > e$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{Lx}{x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Ind.} \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

De lo anterior se deduce que el eje X es asíntota horizontal de la función.

b)

Teniendo en cuenta que la función corta al eje de abscisas en el punto $P(1, 0)$ y que la función es creciente en el intervalo $(1, e)$, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^e f(x) \cdot dx = \int_1^e \frac{Lx}{x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \frac{Lx}{x} = t \left| \begin{array}{l} x = e \rightarrow t = 1 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \right. \right\} \Rightarrow \int_0^1 t \cdot dt =$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

$$\underline{S = \frac{1}{2} u^2.}$$
