PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE – 2000

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.
Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.
Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Consideramos los puntos A(-5, 2, 4), B(-3, 2, 0) y la recta $s \equiv \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$.

a) Calcular la recta r que corta perpendicularmente a s y pasa por B.

b) Consideramos el rectángulo que tiene dos vértices opuestos en A y B, y uno de los lados que pasa por A está contenido en la recta s. Calcular su área.

----

a)

El haz de planos paralelos perpendiculares a r tienen como vector normal e vector director de s, $\overrightarrow{v} = (-3,\ 1,\ 2)$, por lo cual tienen por ecuación $\pi_s \equiv 3x - y - 2z + D = 0$.

El plano π del haz que contiene al punto B tiene que satisfacer su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - y - 2z + D = 0 \\ B(-3,\ 2,\ 0) \end{array}\right\} \Rightarrow -9 - 2 - 0 + D = 0 \ ;; \ \underline{D = 11} \ \Rightarrow \ \underline{\pi \equiv 3x - y - 2z + 11 = 0}$$

El punto P de corte de la recta r con el plano π es el siguiente:

Una expresión de s por ecuaciones paramátricas es $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv 3x - y - 2z + 11 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(1 - 3\lambda) - \lambda - 4\lambda + 11 = 0 \ ;; \ 3 - 14\lambda + 11 = 0 \ ;; \ \underline{\lambda = 1} \ \Rightarrow$$

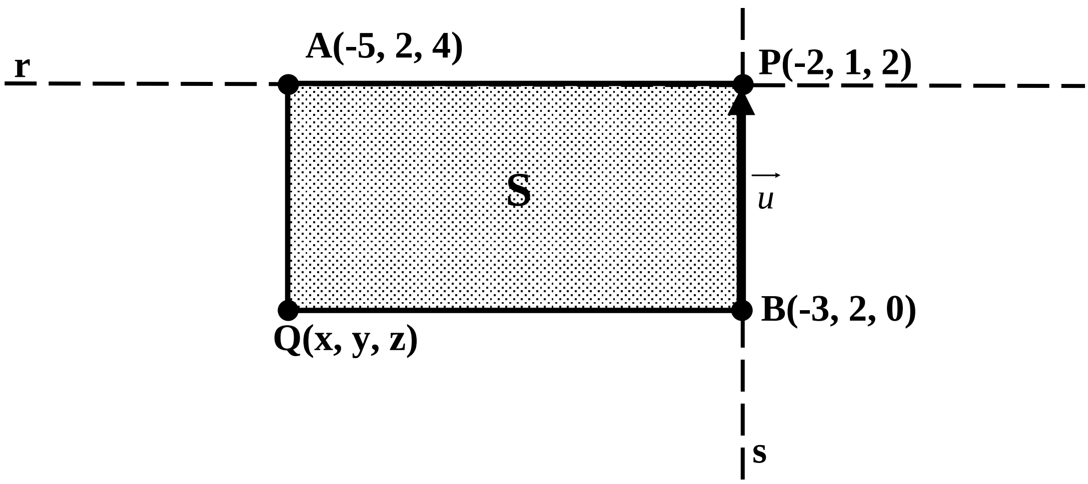
$$\Rightarrow \underline{P(-2,\ 1,\ 2)}$$

La recta r pedida es la que pasa por los puntos B(-3, 2, 0) y P(-2, 1, 2).

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BP} = P - B = (-2,\ 1,\ 2) - (-3,\ 2,\ 0) = (1,\ -1,\ 2) \ \Rightarrow \ \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases}}}$$

b)

La situación gráfica es la que se indica en la figura:



$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{QA} = A - Q = (-5,\ 2,\ 4) - (x,\ y,\ z) = (1,\ -1,\ 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-5 - x,\ 2 - y,\ 4 - z) = (1,\ -1,\ 2) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -5 - x = 1 \rightarrow x = -6 \\ 2 - y = -1 \rightarrow y = 3 \\ 4 - z = 2 \rightarrow z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{Q(-6,\ 3,\ 2)}$$

$$S = \overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{AP} \cdot \left| \overrightarrow{u} \right| = \sqrt{(-2 + 5)^2 + (1 - 2)^2 + (2 - 4)^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} =$$

$$= \sqrt{9 + 1 + 4} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{14} \cdot \sqrt{6} = \underline{\underline{2 \cdot \sqrt{21}\ u^2 = S}}$$

****

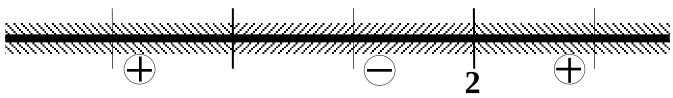
2º) Se considera la función $y = x^2 \cdot e^{-x}$. Estudiar el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas, representando gráficamente la función dada.

El dominio de la función es R.

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x} \;\;\Rightarrow\;\; f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{x \cdot e^x (2-x)}{e^{2x}} = \underline{\frac{x(2-x)}{e^x} = f'(x)}$$

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x(2-x) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \underline{x_1 = 0} \\ \underline{x_2 = 2} \end{cases}$$

El signo de f’(x) depende del numerador, ya que, el denominador es siempre positivo.



$$\underline{\underline{f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; Creciente \;\Rightarrow\; (-\infty,\, 0) \cup (2,\, \infty)}} \;\;;; \qquad \underline{\underline{f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; Decreciente \;\Rightarrow\; (0,\, 2)}}$$

$$f''(x) = \frac{(2-2x) \cdot e^x - x(2-x) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2-2x-2x+x^2}{e^x} = \underline{\frac{x^2-4x+2}{e^x} = f''(x)}$$

$$f''(0) = \frac{2}{e^0} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \;\Rightarrow\; Mínimo \;\Rightarrow\; f(0) = 0 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Mín(0,\, 0)}}$$

$$f''(2) = \frac{2^2 - 4 \cdot 2 + 2}{e^2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \;\Rightarrow\; f(2) = \frac{2^2}{e^2} = \frac{4}{e^2} \cong 0'54 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Máx(2,\, 0'54)}}$$

Para que exista P. I. es condición necesaria que $f''(x) = 0$, pero no es suficiente; para que exista P. I. es necesario que $f'''(x) \neq 0$.

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x + 2 = 0 \;\;;;\;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1 = 2 + \sqrt{2}} \\ \underline{x_2 = 2 - \sqrt{2}} \end{cases}$$

$$f'''(x) = \frac{(2x-4) \cdot e^x - (x^2-4x+2) \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{2x-4-x^2+4x-2}{e^x} = \underline{\frac{-x^2+6x-6}{e^x} = f'''(x)}$$

$$f'''\left(2+\sqrt{2}\right) \neq 0 \;\Rightarrow\; P.\,I. \;\Rightarrow\; f\left(2+\sqrt{2}\right) = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)^2}{e^{2+\sqrt{2}}} \cong 0'38 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I\,(3'41,\, 0'38)}}$$

$$f'''\left(2-\sqrt{2}\right) \neq 0 \;\Rightarrow\; P.\,I. \;\Rightarrow\; f\left(2-\sqrt{2}\right) = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{e^{2-\sqrt{2}}} \cong 0'24 \;\Rightarrow\; \underline{\underline{P.\,I\,(0'59,\, 0'24)}}$$

Asíntotas horizontales: son los valores finitos que toma y cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{Aplicando\ \ L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{Aplicando\ \ de\ \ nuevo\ \ L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=\frac{2}{\infty}=0$$

Asíntota horizontal : y = 0 (Eje X)

Asíntotas verticales: son los valores de x que anulan el denominador:

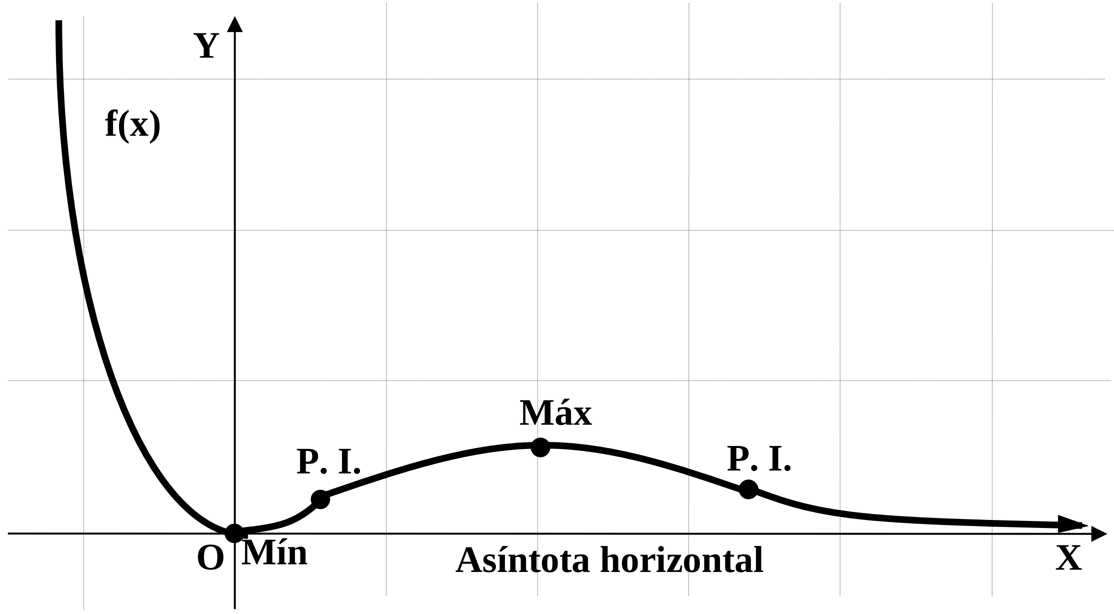
$$e^x\neq 0,\ \ \forall x\in R\ \ \Rightarrow\ \ No\ \ tiene$$

Asíntotas oblicuas.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{e^x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=\frac{1}{\infty}=\underline{0=m}$$

No tiene asíntotas verticales.

La representación gráfica es, aproximadamente, la que sigue:



****

CUESTIONES

1ª) Resolver el siguiente sistema: $\left.\begin{array}{l} x-y=z \\ x+z=y \\ y-z=x \end{array}\right\}.$

El sistema es equivalente a $\left.\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}$. Como puede observarse, se trata de un sistema homogéneo cuyas dos últimas ecuaciones son iguales.

El sistema puede expresarse de la forma $\left.\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\}.$

Todos los sistemas de ecuaciones homogéneos son compatibles, ya que admiten la solución trivial x = 0, y = 0, z = 0.

Por tener la matriz de coeficientes rango dos, menor que el número de incógnitas, el sistema tiene, además de la solución trivial, infinitos grupos de soluciones; se obtienen parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo y:

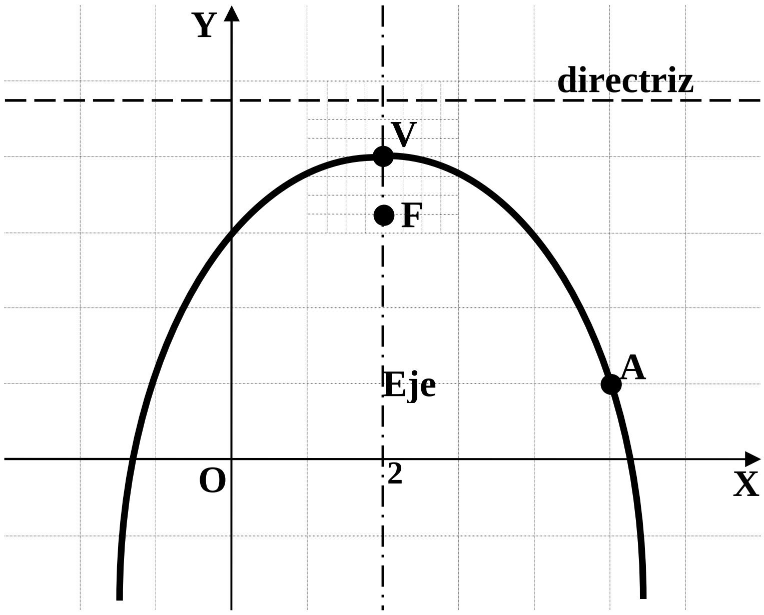
$$\left.\begin{array}{l} x-y-z=0 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{y=\lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-z=\lambda \\ x+z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x=2\lambda \;\;;;\;\; \underline{x=\lambda} \;\;;;\;\; \underline{z=0}$$

$$\underline{\underline{Solución: \left\{\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{array}\right.}}$$

****

2ª) Hallar la ecuación de la parábola cuyo eje es la recta x = 2, la ordenada máxima es 4 y pasa por el punto A(5, 1).

La representación gráfica de la parábola es la siguiente:



Se trata de una parábola de eje paralelo al eje de ordenadas, cóncava, con el vértice en el punto V(2, 4), cuya ecuación general es:

$(x-\alpha)^2 = -2p(y-\beta)$, siendo α y β las coordenadas del vértice.

Para determinar el valor del parámetro tendremos en cuenta que la parábola pasa por el punto A(5, 1):

$$(5-2)^2 = -2p(1-4) \;\;;;\;\; 9 = 6p \;\;;;\;\; \underline{\underline{p = \frac{3}{2}}}$$

La directriz es una recta paralela al eje de abscisas y, teniendo en cuenta que el parámetro es la distancia del foco a la directriz y que el vértice esta en el punto medio entre el foco y la directriz, su ecuación es:

$$x = 4 + \frac{p}{2} = 4 + \frac{\frac{3}{2}}{2} = 4 + \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{19}{4} = x \Rightarrow Directriz}}$$

La ordenada del foco es la siguiente.

$$y = 4 - \frac{p}{2} = 4 - \frac{\frac{3}{2}}{2} = 4 - \frac{3}{4} = \underline{\underline{\frac{13}{4} \Rightarrow F\left(2,\ \frac{13}{4}\right)}}$$

Finalmente la ecuación de la parábola es la siguiente:

$$(x-2)^2 = -2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (y-4) \;;\; x^2 - 4x + 4 = -3y + 12 \;;\; 3y = -x^2 + 4x + 8$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}}}$$

Este ejercicio se puede resolver de la siguiente forma:

Una parábola cuyo eje es paralelo a Y tiene como ecuación: $y = ax^2 + bx + c$.

Sabiendo que pasa por los puntos A(5, 1) y por V(2, 4) y que el punto V es un máximo, sería:

$$Por \;\; pasar \;\; por \;\; A(5,\; 1) \Rightarrow y_{(5)} = 1 \Rightarrow 25a + 5b + c = 1 \qquad (1)$$

$$Por \;\; pasar \;\; por \;\; V(2,\; 4) \Rightarrow y_{(2)} = 4 \Rightarrow 4a + 2b + c = 4 \qquad (2)$$

$$Por \;\; máximo \;\; en \;\; V(2,\; 4) \Rightarrow y' = 2ax + b \Rightarrow y'_{(2)} = 0 \Rightarrow 4a + b = 0 \;;\; \underline{b = -4a}$$

Sustituyendo en (1) y (2) el valor de a y resolviendo:

$$\left.\begin{array}{r} 25a - 20a + c = 1 \\ 4a - 8a + c = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5a + c = 1 \\ -4a + c = 4 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 5a + c = 1 \\ 4a - c = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow 9a = -3 \;;\; 3a = -1 \;;\; \underline{a = -\frac{1}{3}}$$

$$b = -4a = \underline{\frac{4}{3} = b} \;;\; 4a + 2b + c = 4 \;;\; -\frac{4}{3} + \frac{8}{3} + c = 4 \;;\; -4 + 8 + 3c = 12 \;;\; \underline{c = \frac{8}{3}}$$

Y finalmente: $\underline{\underline{y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}}}$

****

3ª) Calcular $I=\int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx$.

$$I=\int x^3 \cdot e^{x^2} \cdot dx=\int x^2 \cdot x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u=x^2 \rightarrow du=2x \cdot dx \\ x \cdot e^{x^2} \cdot dx=dv \rightarrow dv=\frac{1}{2}e^{x^2} \cdot dx \quad (*) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{x^2}-\int \frac{1}{2}e^{x^2} \cdot 2x \cdot dx=\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{x^2}-\int x \cdot e^{x^2} \cdot dx=\frac{1}{2}x^2 \cdot e^{x^2}-\frac{1}{2}e^{x^2}+C=$$

$$=\underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x^2}\left(x^2-1\right)+C=I}}$$

$$(*) \quad \int x \cdot e^{x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2=t \\ 2x \cdot dx=dt \\ x \cdot dx=\frac{1}{2}dt \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\int e^t \cdot dt=\frac{1}{2}e^t+C=\underline{\frac{1}{2}e^{x^2}+C}$$

****

4ª) Utilizando el teorema de los incrementos finitos, demostrar que para cualquiera números reales a < b, se verifica que $sen\ b - sen\ a \leq b - a$.

El teorema de los incrementos finitos, del valor medio o de Lagrange dice:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Considerando la función $f(x) = sen\ (bx) - sen\ (ax)$, es continua en todo R, por ser la suma de dos funciones continuas en R

****