PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO - 2001

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) a) Enunciar el teorema de Rouché-Fröbenius.

b) Analizar, en función del parámetro α el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$.

c) Resolver el sistema cuando α = 3 y α = 0.

----

a)

El Teorema de Rouché-Fröbenius puede enunciarse del modo siguiente:

La condición necesaria y suficiente para que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas tenga solución es que coincida el rango de la matriz de los coeficientes con el rango de la matriz ampliada con los términos independientes.

Si el rango es igual al número de incógnitas el sistema es compatible determinado.

Si el rango es menor que el número de incógnitas el sistema es compatible indeterminado.

En el caso particular de un sistema homogéneo, la condición necesaria y suficiente para que un sistema sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea menor que el número de incógnitas. La condición necesaria y suficiente para que un sistema de n ecuaciones homogéneas con n incógnitas sea compatible es que el determinante de la matriz de los coeficientes sea nulo.

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de M en función del parámetro α es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-a-2a-4-1-4+2a^2=2a^2-3a-9=0 \;;;\; a=\frac{3\pm\sqrt{9+72}}{4}=$$

$$=\frac{3\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{3\pm 9}{4} \Rightarrow \underline{a_1=3} \;;;\; \underline{a_2=-\tfrac{3}{2}}.$$

$$\underline{Para \; \begin{Bmatrix} a\neq 3 \\ a\neq -\tfrac{3}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=3=n^o\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; determinado}$$

$$Para\; a=3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_3=C_4\} \Rightarrow \underline{Rango\; M'=2}$$

$$\underline{Para\; a=3 \Rightarrow Rango\; M=Rango\; M'=2<n^o\; incógnitas \Rightarrow Compatible\; indeterminado}$$

$$Para\; a=-\tfrac{3}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -\tfrac{3}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -\tfrac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$, equivalente a efectos de rango a la matriz

$$M''=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rango\; M' \Rightarrow \{C_1,\; C_2,\; C_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-6+6-8-2-8-18=$$

$$=-36\neq 0 \Rightarrow \underline{Rango\; M'=3}.$$

$$\underline{Para\ \ a=-\tfrac{3}{2}\ \Rightarrow\ Rango\ M=2\ ;;\ Rango\ M'=3\ \Rightarrow\ Incompatible}$$

c)

Resolvemos para α = 3. El sistema resulta $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ 3x-y+2z=2 \\ x+2y+3z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Despreciando una ecuación, por ejemplo la segunda, y parametrizando una de las incógnitas, por ejemplo, $\underline{z=\lambda}$, resulta:

$$\begin{cases} x-2y=-1+\lambda \\ x+2y=3-3\lambda \end{cases} \Rightarrow 2x=2-2\lambda\ ;;\ \underline{x=1-\lambda}\ ;;\ 2y=x+1-\lambda=1-\lambda+1-\lambda=2-2\lambda\ ;;\ \underline{y=1-\lambda}.$$

$$\underline{\underline{Solución:\ \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=1-\lambda\ ;\ \forall\lambda\in R \\ z=\lambda \end{cases}}}$$

Resolvemos para α = 0. El sistema resulta $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ -y+2z=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-4-12-3+4}{-9}=\frac{-15}{-9}=\underline{\underline{\frac{5}{3}=x}}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-2+2-6}{-9}=\frac{-6}{-9}=\underline{\underline{\frac{2}{3}=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-3-4-1-4}{-9}=\frac{-12}{-9}=\underline{\underline{\frac{4}{3}=z}}$$

****

2º) Dos hermanos heredan una parcela que ha de repartirse. La parcela es la región limitada por la curva $y=\sqrt{x-1}$ y la recta $y=\frac{1}{2}(x-1)$.

a) Calcular el área de la parcela.

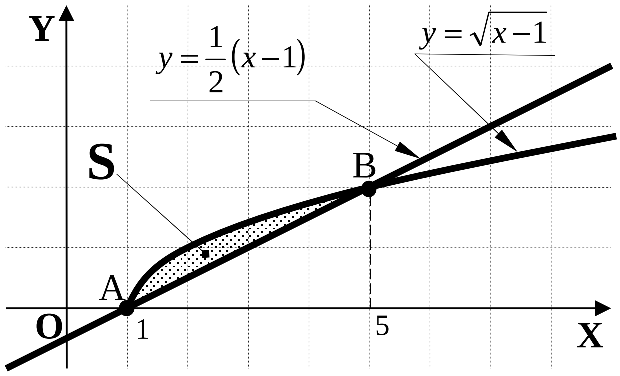
b) Deciden dividir la parcela en partes iguales, mediante una recta de la forma y = α. Hallar el valor de α > 0.

----

a)

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la que aparece en la primera figura.

Los puntos de corte de la curva y la recta son los siguientes:



$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x-1} \\ y=\frac{1}{2}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x-1}=\frac{1}{2}(x-1) \;;;$$

$$2\sqrt{x-1}=x-1 \;;;\; 4(x-1)=(x-1)^2 \;;;$$

$$(x-1)^2-4(x-1)=0 \;;;\; (x-1)[(x-1)-4]=0 \;;;$$

$$(x-1)(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{x_1=1} \rightarrow y_1=0 \Rightarrow \underline{A(1,\ 0)} \\ \\ \underline{x_2=5} \rightarrow y_2=2 \Rightarrow \underline{B(5,\ 2)} \end{cases} .$$

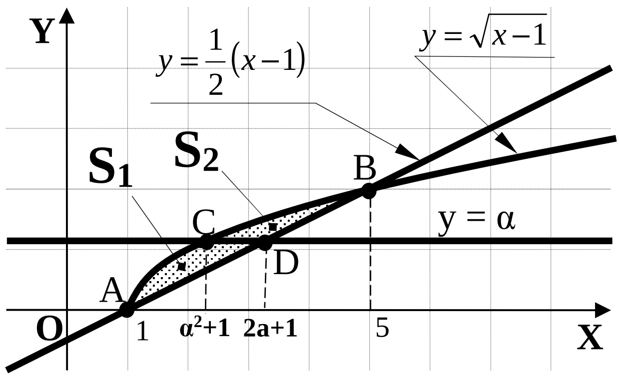
De la observación de la figura se deduce el área pedida, que es la siguiente:

$$S=\int_1^5\left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^5=\left[\frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_1^5=$$

$$=\left[\frac{2(5-1)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(5-1)^2}{4}\right]-0=\frac{2\sqrt{4^3}}{3}-4=\frac{2\cdot 8}{3}-4=\frac{16}{3}-4=\frac{16-12}{3}=\underline{\underline{\frac{4}{3}\,u^2=S}} .$$

b)

Los puntos C y D son las intersecciones de la recta y = α con la curva y la recta, respectivamente.



$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{x-1} \\ y=a \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{x-1}=a \;;;\; x-1=a^2 \;;;$$

$$x=a^2+1 \Rightarrow \underline{C\left(a^2+1,\ a\right)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} y=a \\ y=\frac{1}{2}(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{1}{2}(x-1)\ ;;\ 2a=x-1\ ;;\ x=2a+1 \Rightarrow \underline{D(2a+1,\ a)}.$$

Como las superficies S_1 y S_2 tienen que ser iguales, ha de ser:

$$S_1=\int_1^{a^2+1}\left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx+\int_{a^2+1}^{2a+1}\left[a-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{2}\right]_1^{a^2+1}+\left[ax-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_{a^2+1}^{2a+1}=$$

$$=\left[\frac{2\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{\left(a^2\right)^2}{4}\right]-0+\left[a(2a+1)-\frac{(2a)^2}{4}\right]-\left[a\left(a^2+1\right)-\frac{\left(a^2\right)^2}{4}\right]=$$

$$=\frac{2a^3}{3}-\frac{a^4}{4}+2a^2+a-a^2-a^3-a+\frac{a^4}{4}=\frac{2a^3}{3}+a^2-a^3=-\frac{a^3}{3}+a^2=\underline{\frac{3a^2-a^3}{3}=S_1}.$$

$$S_2=\int_{a^2+1}^{2a+1}\left[\sqrt{x-1}-a\right]\cdot dx+\int_{2a+1}^{5}\left[\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}(x-1)\right]\cdot dx=$$

$$=\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-ax\right]_{a^2+1}^{2a+1}+\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{(x-1)^2}{4}\right]_{2a+1}^{5}=$$

$$=\left[\frac{2(2a)^{\frac{3}{2}}}{3}-a(2a+1)\right]-\left[\frac{2\left(a^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}-a\left(a^2+1\right)\right]+\left[\frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{4^2}{4}\right]-\left[\frac{2(2a)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{(2a)^2}{4}\right]=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{(2a)^3}}{3}-2a^2-a-\frac{2a^3}{3}+a^3+a+\frac{16}{3}-4-\frac{2\cdot\sqrt{(2a)^3}}{3}+a^2=-a^2-\frac{2a^3}{3}+a^3+\frac{16}{3}-4=$$

$$=-a^2+\frac{a^3}{3}+\frac{4}{3}=\underline{\frac{a^3-3a^2+4}{3}=S_2}.$$

$$S_1=S_2 \Rightarrow \frac{3a^2-a^3}{3}=\frac{a^3-3a^2+4}{3}\ ;;\ 3a^2-a^3=a^3-3a^2+4\ ;;\ 2a^3-6a^2+4=0\ ;;$$

$\underline{a^3 - 3a^2 + 2 = 0}$. Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$a^2 - 2a - 2 = 0 \;;;\; a = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Las soluciones son $\underline{a_1 = 1}$, $\underline{a_2 = 1 + \sqrt{3}}$, $\underline{a_3 = 1 - \sqrt{3}}$.

La única solución valida es para α = 1 ya que las otras dos soluciones están fuera del intervalo (0, 2), que es el recorrido de la curva en el dominio de la parcela.

<u>Deben dividir la parcela mediante la recta y = 1.</u>

****

CUESTIONES

1ª) Sea A una matriz cuadrada de orden 2 verificando $2 \cdot A^2 = A$. Calcular razonadamente los posibles valores de A.

Sea A la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Es evidente que la igualdad se cumple para la matriz nula, o sea $\underline{\underline{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}}$.

Por otra parte: $2 \cdot A^2 = A$;; $2 \cdot A \cdot A = A$. Multiplicando por la derecha por A^{-1}:

$$2 \cdot A \cdot A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} \;;;\; 2 \cdot A \cdot I = I \;;;\; 2 \cdot A = I \;;;\; A = \frac{1}{2} \cdot I \Rightarrow \underline{\underline{A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}}$$

****

2ª) Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son vectores ortogonales y de módulo 1, hallar los posibles valores de α para los que los vectores $\vec{u}+a\cdot\vec{v}$ y $\vec{u}-a\cdot\vec{v}$ formen un ángulo de 60º.

Por ser $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales es $\left|\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right|=\left|\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right|$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ y $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{v}\cdot\vec{v}=1$.

Sabiendo que el producto de dos vectores es el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman:

$$\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right)=\vec{u}\cdot\vec{u}-a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}-a^2\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{u}-a^2\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}=$$

$$=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{u}\right|\cdot\cos 0-a^2\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos 0=1\cdot 1\cdot 1-a^2\cdot 1\cdot 1=\underline{1-a^2}.$$

$$\left|\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right|=\sqrt{\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)}=\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}+a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+a\cdot\vec{u}\cdot\vec{v}+a^2\cdot\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{1+a^2}.$$

$$\left(\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right)\cdot\left(\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right)=\left|\vec{u}+a\cdot\vec{v}\right|\cdot\left|\vec{u}-a\cdot\vec{v}\right|\cdot\cos 60º\ \Rightarrow\ 1-a^2=\left(\sqrt{1+a^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\ ;;$$

$$2\cdot\left(1-a^2\right)=1+a^2\ ;;\ 2-2a^2=1+a^2\ ;;\ 3a^2=1\ ;;\ a^2=\frac{1}{3}\ \Rightarrow\ \underline{\underline{a=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}}}.$$

****

3ª) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$.

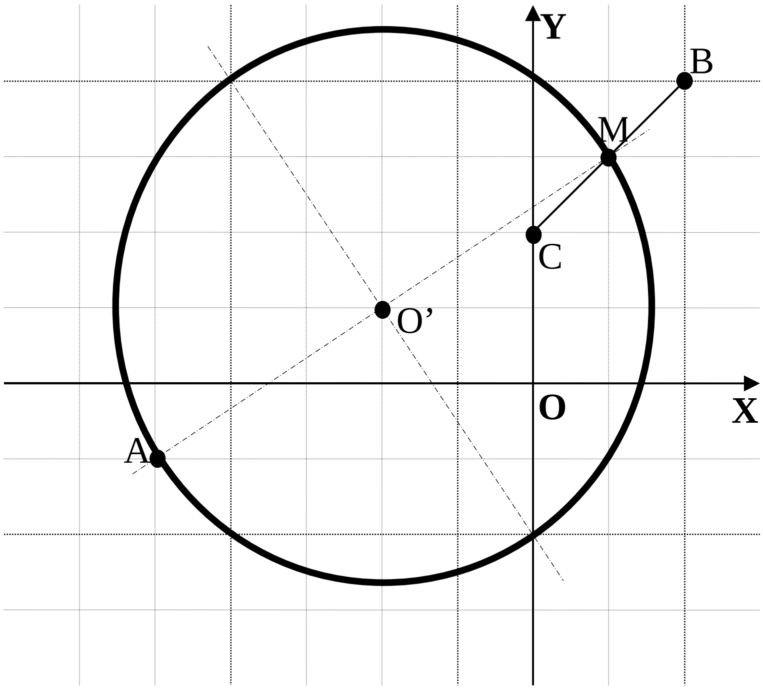
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2x \cdot e^{x^2}}{-sen\ x} = \frac{0}{-0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{2\left(1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2x \cdot e^{x^2}\right)}{-\cos x} = \frac{2 \cdot (1+0)}{-1} = \underline{\underline{-2}}.$$

****

4ª) Dados los puntos A(-5, -1), B(2, 4) y C(0, 2), y sea M el punto medio de BC. Calcular la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es el segmento AM.

Para una mejor comprensión del ejercicio, se hace la representación gráfica, aproximada, de la situación.



El punto medio de BC es $M \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2+0}{2} = 1 \\ y = \frac{4+2}{2} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{M = (1,\ 3)}$.

El centro de la circunferencia O' es el punto medio de AM:

$$O' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{-5+1}{2} = -2 \\ y = \frac{-1+3}{2} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{O' = (-2,\ 1)}.$$

El radio de la circunferencia es $r = \overline{AO'} = \sqrt{[-2-(-5)]^2 + [1-(-1)]^2} = \sqrt{9+4} = \underline{\sqrt{13} = r}$.

Siendo $\left\{ \begin{array}{l} A = -2a = -2 \cdot (-2) = 4 \\ B = -2b = -2 \cdot 1 = -2 \\ C = a^2 + b^2 - r^2 = (-2)^2 + 1^2 - \left(\sqrt{13}\right)^2 = 4 + 1 - 13 = -8 \end{array} \right\}$, la ecuación de la circunferencia es $\underline{\underline{x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0}}$.

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) La recta $r \equiv \begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-2t \\ z=-6+5t \end{cases}$ corta al plano $\pi_1 \equiv x-y-2z=1$ en el punto A, y al plano $\pi_2 \equiv x+y-z=0$ en el punto B. Sea O el origen de coordenadas.

a) Hallar el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

b) Hallar el área del triángulo OAB.

----

a)

El punto A es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-2t \\ z=-6+5t \end{cases} \\ \pi_1 \equiv x-y-2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2+3t-(4-2t)-2(-6+5t)=1 \;;\; -2+3t-4+2t+12-10t=1 \;;$$

$5=5t \;;\; t=1 \Rightarrow \underline{A(1,\ 2,\ -1)}$.

El punto B es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=-2+3t \\ y=4-2t \\ z=-6+5t \end{cases} \\ \pi_1 \equiv x+y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2+3t+(4-2t)-(-6+5t)= \;;\; -2+3t+4-2t+6-5t=0 \;;\; 8=4t \;;$$

$t=2 \Rightarrow \underline{B(4,\ 0,\ 4)}$.

Los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ son $\overrightarrow{OA}=(1,\ 2,\ -1)$ y $\overrightarrow{OB}=(4,\ 0,\ 4)$.

Aplicando el concepto de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{OB}\right|} = \frac{(1,\ 2,\ -1)\cdot(4,\ 0,\ 4)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} \cdot \sqrt{4^2+0^2+4^2}} =$$

$$= \frac{4+0-4}{\sqrt{1+4+1} \cdot \sqrt{16+16}} = \frac{0}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{32}} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 90^\circ}}.$$

b)

El área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo que determinan los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. Conviene saber que el área del paralelogramo es igual que el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan, por lo tanto:

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 4 \end{matrix}\right\|=2\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}\right\|=2\left|2i-j-2k-j\right|=2\left|2i-2j-2k\right|=$$

$$=4\cdot\left|i-j+k\right|=4\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}=\underline{\underline{4\sqrt{3}\ u^2=S_{OAB}}}\ .$$

****

2º) Dada la función $f(x) = ax + \frac{b}{x}$, siendo α y b constantes positivas, se pide:

a) Demostrar que el mínimo valor de f(x) en (0, +∞) es $2\sqrt{ab}$.

b) Deducir $2\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

c) Para α = 2 y b = 8, hallar las asíntotas de la gráfica de f(x) en (0, +∞).

----

a)

Una función tiene un mínimo relativo para los valores que anulan la primera derivada y hacer positiva la segunda derivada.

$$f'(x) = a - \frac{b}{x^2} = 0 \;;;\; ax^2 - b = 0 \;;;\; x^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow \underline{x_1 = -\sqrt{\frac{b}{a}}} \;;;\; \underline{x_2 = +\sqrt{\frac{b}{a}}}.$$

$$f''(x) = -\frac{-b \cdot 2x}{x^4} = \frac{2b}{x^3} \Rightarrow \begin{cases} f''_{\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} = \dfrac{2b}{\left(-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3} < 0 \Rightarrow Para\ \ máximo \\ \\ f''_{\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} = \dfrac{2b}{\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^3} > 0 \Rightarrow \underline{Para\ \ mínimo} \end{cases}.$$

$$f_{\left(+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)} = \frac{ax^2 + b}{x} = \frac{a \cdot \frac{b}{a} + b}{\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{2b \cdot \sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{2b \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{b} = \underline{2\sqrt{ab}}.$$

$$\underline{\underline{El\ \ mínimo\ \ de\ \ f(x)\ \ en\ \ (0,\ +\infty)\ \ es\ \ 2\sqrt{ab},\ como\ \ queríamos\ \ demostrar}}$$

b)

Para deducir que $2\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ tenemos en cuenta que $f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 2\sqrt{ab}$ es menor que cualquier otro valor de f(x) en (0, +∞).

Teniendo en cuenta que $f(1) = a + b$, podemos asegurar que $f\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) < f(1)$, o sea:

$$\underline{\underline{2\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},\ \forall x \in (0,\ +\infty),\ c.q.d.}}$$

c)

Para α = 2 y b = 8 es $f(x)=2x+\frac{8}{x}=\frac{2x^2+8}{x}$ y sus asíntotas en el intervalo (0, +∞) son las siguientes:

Las asíntotas verticales son los valores reales de x que anulan el denominador:

<u>Asíntota vertical: x = 0</u>

Para determinar las tendencias recurrimos a los límites laterales:

$$\underset{x\to 0^+}{lím} f(x)=\underset{x\to 0^+}{lím}\frac{2x^2+8}{x}=\frac{8}{0^+}=\underline{+\infty}.$$

Las asíntotas horizontales son los valores finitos que toma la función cuando x tiende a valer infinito; son de la forma y = k.

$$y=k=\underset{x\to\infty}{lím} f(x)=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{2x^2+8}{x}=\infty \Rightarrow \underline{\underline{No\ \ tiene\ \ asíntotas\ \ horizontales}}.$$

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador; como ocurre en el caso que nos ocupa.

$$m=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{f(x)}{x}=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{\frac{2x^2+8}{x}}{x}=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{2x^2+8}{x^2}=\underline{2=m}.$$

$$n=\underset{x\to\infty}{lím}\left[f(x)-mx\right]=\underset{x\to\infty}{lím}\left(\frac{2x^2+8}{x}-2x\right)=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{2x^2+8-2x^2}{x}=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{8}{x}=\underline{0=n}.$$

$$Asíntota\ \ oblícua \Rightarrow \underline{\underline{y=2x}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Encontrar todas las matrices $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$ que verifican la igualdad $C \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \cdot C$.

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix} \;;;\; \begin{pmatrix} 1+2a & 3+0 \\ b+2 & 3b+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5+3b & -5a+3 \\ -8+6b & -8a+6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1+2a=-5+3b \\ b+2=-8+6b \\ 3=-5a+3 \\ 3b=-8a+6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 5b=10 \\ -5a=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a=0} \;;;\; \underline{b=2}.$$

$$\underline{\underline{C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}$$

****

2ª) Calcular la distancia entre la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x-y+z+2=0$.

Comprobamos en primer lugar que la recta y el plano son paralelos (en otro caso serían secantes y la distancia sería cero).

El vector director de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y-2 = \frac{z-1}{-1}$ es $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -1)$ y el vector normal del plano $\pi \equiv x-y+z+2=0$ es $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$.

Para que la recta y el plano sean paralelos es necesario que los vectores $\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ -1)$ y $\overrightarrow{n} = (1,\ -1,\ 1)$ sean perpendiculares, es decir: su producto escalar sea 0:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{n} = (2,\ 1,\ -1) \cdot (1,\ -1,\ 1) = 2-1-1=0 \Rightarrow \underline{r \perp \pi}$, como queríamos comprobar.

La distancia de la recta r al plano π es la misma que la distancia de un punto cualquiera de r a π. Un punto de r es P(1, 2, 1).

Sabiendo que la distancia del punto $P_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ al plano genérico de ecuación $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ es $d(P_0,\ \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$; aplicándola al punto $P(1,\ 2,\ 1)$ y al plano $\pi \equiv x-y+z+2=0$, es:

$$d(r,\ \pi) = d(P,\ \pi) = \frac{|1\cdot 1 - 1\cdot 2 + 1\cdot 1 + 2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{|1-2+1+2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{3}}{3}\ unidades = d(r,\ \pi)}}.$$

****

3ª) Calcular $I = \int \left(sen^3\, x \cdot \cos^2 x \right) \cdot dx$.

$$I = \int sen^3\, x \cdot \cos^2 x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos\, x = t \;\;;;\;\; sen\; x = \sqrt{1-t^2} \\ -sen\; x \cdot dx = dt \;\;;;\;\; dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{array} \right\} \Rightarrow -\int \left(\sqrt{1-t^2} \right)^3 \cdot t^2 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\int \left(1-t^2\right) \cdot \sqrt{1-t^2} \cdot t^2 \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\int \left(1-t^2\right) \cdot t^2 \cdot dt = -\int \left(t^2 - t^4\right) \cdot dt = \int \left(t^4 - t^2\right) \cdot dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \underline{\underline{\frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C = I}} \; .$$

****

4ª) ¿Se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)=\frac{1}{\cos x}$ en el intervalo $[0,\ \pi]$? Razona la respuesta.

El teorema de Bolzano se puede enunciar de la siguiente forma:

"Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a, b] y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a,\ b)$ tal que $f(c)=0$".

La función f(x) es continua en su dominio, que es R, excepto para los valores que anulan el denominador, que son los siguientes: $\cos x=0 \Rightarrow x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2},\ k\in Z$.

La función no es continua para $x=\frac{\pi}{2}\in[0,\ \pi]$, por lo cual:

No se puede aplicar el teorema de Bolzano a la función f(x) en el intervalo [0, π].

****