PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2002

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Se consideran los planos $\pi_1 \equiv x+y+z=0 \;\; y \;\; \pi_2 \equiv x-y+z=1$. Se pide:

a) Hallar un plano π, perpendicular a ambos y que pase por el punto P(1, 2, -1).

b) Determinar una recta r paralela a ambos pasando por el punto Q(2, 1, 1).

c) Calcular el ángulo que forman $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$.

----

a)

El plano π pedido puede determinarse por tener como vectores directores a dos vectores normales a los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ y que pasa por P.

Los vectores normales a los planos $\pi_1 \;\; y \;\; \pi_2$ pueden ser: $\begin{cases} \overrightarrow{n_1} = (1,\ 1,\ 1) \\ \\ \overrightarrow{n_2} = (1,\ -1,\ 1) \end{cases}$.

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ x-1+y-2-z-1-z-1+x-1-y+2=0\ ;;$$

$$2x-2z-4=0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi \equiv x-z-2=0}}$$

b)

Los planos π_1 y π_2 determinan la recta $r' \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases}$, que expresada en unas ecuaciones paramétricas es:

$$r' \equiv \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-1=0 \end{cases} \Rightarrow z=k \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=-k \\ x-y=1-k \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=1-2k\ ;;\ \underline{x=\frac{1}{2}-k}$$

$$x+y=-k\ ;;\ y=-x-k=-\frac{1}{2}+k-k=\underline{-\frac{1}{2}=y} \Rightarrow \underline{r' \equiv \begin{cases} x=\frac{1}{2}-k \\ y=-\frac{1}{2} \\ z=k \end{cases}} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v}=(-1,\ 0,\ 1)}$$

La recta r es paralela a r’ y pasa por Q(2, 1, 1):

$$r \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{v}=(-1,\ 0,\ 1) \\ Q(2,\ 1,\ 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=2-k \\ y=1 \\ z=1+k \end{cases}}}$$

c)

El ángulo que forman los planos π_1 y π_2 es el mismo que forman sus vectores normales, por lo cual:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{n_1}=(1,\ 1,\ 1) \\ \\ \overrightarrow{n_2}=(1,\ -,\ 1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(1,\ 1,\ 1)\cdot(1,\ -1,\ 1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} =$$

$$= \frac{1-1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{3} = 0'3333 \Rightarrow \alpha = arc.\ \cos 0'3333 = \underline{\underline{70^{o}\ 31'\ 44'' = \alpha}}$$

****

2º) a) Enunciar el teorema de los incrementos finitos.

b) Una función f(x), derivable en toda la recta, verifica: f(0) = -2; f(2) = 6.

b_1) Aplicando el teorema anterior, probar que existe un punto c en el intervalo $(0,\ 2)$ tal que $f'(c)=4$.

b_2) Si además f(x) tiene derivada continua y f'(0) = 0, probar que hay un punto en el intervalo $(0,\ 2)$ en el que la derivada de f toma el valor 3.

----

a)

El teorema de los incrementos finitos, del valor medio o de Lagrange se puede enunciar diciendo:

Si f(x) es una función continua en el intervalo [a, b] y derivable en (a, b), entonces, existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

b)

b_1)

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \left.\begin{cases} f(0)=-2 \\ f(2)=6 \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{6-(-2)}{2}=\frac{8}{2}=\underline{\underline{4=f'(c)}},\ \ c.q.p.$$

b_2)

$$f'(c)=3 \Rightarrow \frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{f(x)-(-2)}{x}=\frac{f(x)+2}{x}=3\ \ ;;\ \ f(x)=3x-2 \Rightarrow \underline{\underline{f'(x)=3}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, hallar para qué valores de m la matriz $B+mA$ no tiene inversa.

Para que una matriz no sea inversible, (no tenga inversa) es condición necesaria que su determinante sea distinto de cero.

$$B+m\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+m\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m & m\\ 2m & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+m & 1+m\\ 2+2m & 2\end{pmatrix}.$$

$$\left|B+m\cdot A\right|=\begin{vmatrix}3+m & 1+m\\ 2+2m & 2\end{vmatrix}=2(3+m)-(1+m)(2+2m)=6+2m-1-2m-2m-2m^2=$$

$$=5-2m-2m^2=0\ ;;\ 2m^2+2m-4=0\ ;;\ m^2+m-2=0\ ;;\ m=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{m_1=-2}\ ;;\ \underline{m_2=1}.$$

$$\underline{\underline{La\ \ matriz\ B+m\cdot A\ \ es\ \ inversible\ \ \forall m\in R,\ \ excepto\ \ para\ \ los\ \ valores\ \ m=-2\ \ y\ \ m=1}}$$

****

2ª) Calcular el valor de α para que el producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{u} = (a,\ -a,\ 2)$ y $\overrightarrow{v} = (2,\ a,\ 1)$ sea proporcional al vector $\overrightarrow{w} = (1,\ 1,\ 0)$.

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & -a & 2 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = -ai + 4j + a^2k + 2ak - 2ai - aj = (-3a)i + (4-a)j + (a^2+2a)k =$$

$$= \underline{(-3a,\ 4-a,\ a^2+2a) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}}\ .$$

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w} \ \Rightarrow\ (-3a,\ 4-a,\ a^2+2a) = (\lambda,\ \lambda,\ 0) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3a \\ \lambda = 4-a \\ 0 = a^2+2a \end{cases} \Rightarrow a^2 + 2a = 0\ ;;$$

$$a(a+2) = 0 \ \Rightarrow\ \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = -2 \end{cases}.$$

Para α = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3a = 0 \\ \lambda = 4 - a = 4 \neq 0 \end{cases} \ \Rightarrow\ \underline{\textit{Valor no útil}}$

Para α = -2 $\Rightarrow \begin{cases} \lambda = -3a = -3 \cdot (-2) = 6 \\ \lambda = 4 - a = 4 + 2 = 6 \end{cases} \ \Rightarrow\ \underline{\textit{Valor útil}}$

<u>El valor de α que satisfaga la condición pedida es α = -2.</u>

****

3ª) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen\ x}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{sen\ x} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \left(Aplicando\ \ la\ \ \mathrm{Re}\,gla\ \ de\ \ L\acute{}Hopital \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}} - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{\cos\ x} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{1} = \underline{\underline{1}}$$

****

4ª) Calcular $\int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} 1+2x^2 = t \\ 4x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{4}dt \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{4} \cdot \int t^{-\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{t} + C = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+2x^2} + C = I}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) La circunferencia $x^2 + (y+4)^2 = 25$ corta al eje OX en dos puntos P_1 y P_2.
a) Hallar las coordenadas de los puntos P_1 y P_2.
b) Hallar la ecuación de la elipse cuyos focos son P_1 y P_2 y cuyo eje mayor es igual al diámetro de la circunferencia anterior.

----

a)

Los puntos de corte con el eje OX se obtienen haciendo y = 0:

$$x^2 + (0+4)^2 = 25 \;;\; x^2 + 16 = 25 \;;\; x^2 = 25 - 16 = 9 \;;\; x = \pm 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(3,\ 0)}} \;;\; \underline{\underline{P_2(-3,\ 0)}}$$

b)

Del apartado anterior se deduce que c = 3.

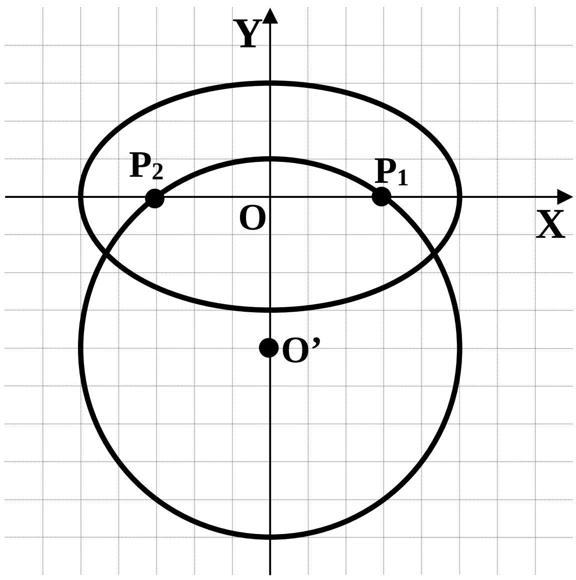
El radio de la circunferencia es 5, que equivale al semieje mayor de la elipse, por lo cual: a = 5.

Siendo la relación fundamental de la elipse: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9$;;

$$b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \underline{b = 4}.$$

Sabiendo que la ecuación de la elipse es: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}}$

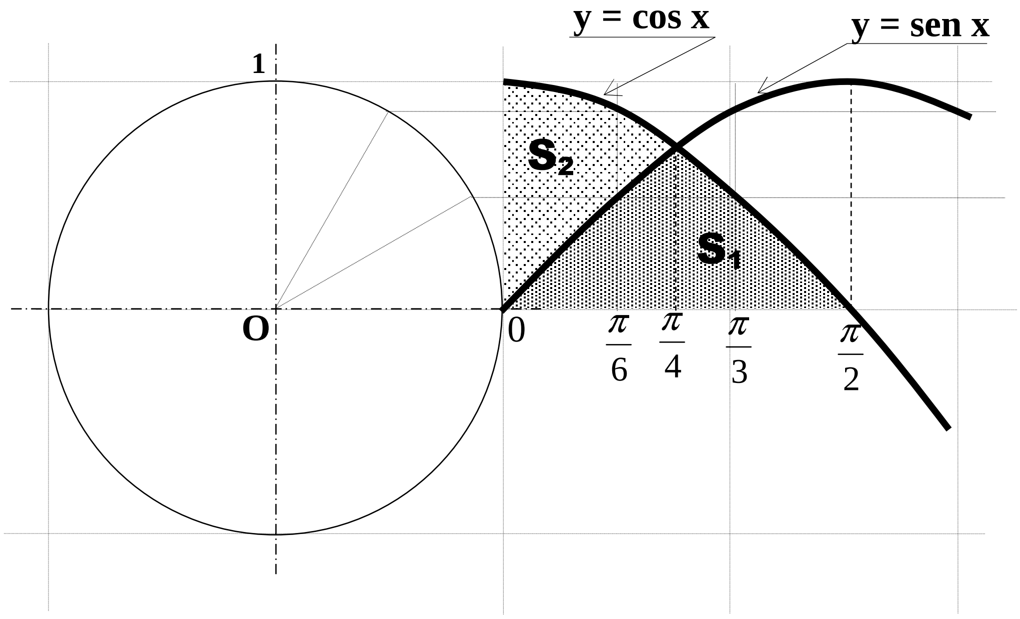
A continuación ilustramos la situación:



****

2º) La gráfica de la función $y = \cos\ x$ en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ determina con los dos ejes de coordenadas un recinto que queda dividido en dos partes por la gráfica de la función $y = sen\ x$. Determinar el área de cada una de estas partes.

La representación gráfica de la situación es la siguiente:



El punto de corte de las dos funciones en el intervalo $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ es:

$$sen\ x = \cos\ x\ \ ;;\ \ tag\ x = 1\ \Rightarrow x = 45^o = \underline{\frac{\pi}{4} = x}$$

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\ \cdot dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\ \cdot dx = \left[-\cos\ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[sen\ x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\cos\ \frac{\pi}{4} + \cos\ 0\right) + \left(sen\ \frac{\pi}{2} - sen\ \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$= -\cos\ 45^o + \cos\ 0^o + sen\ 90^o - sen\ 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2} = 2 - 1'414 = \underline{\underline{0'586\ u^2 = S_1}}$$

$$S_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\ x - sen\ x) \cdot dx = \left[sen\ x + \cos\ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\ \frac{\pi}{4}\right) - (sen\ 0 + \cos\ 0) =$$

$$= sen\ 45^o + \cos\ 45^o - \cos\ 0^o - sen\ 0^o = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 0 = \sqrt{2} - 1 = 1'414 - 1 = \underline{\underline{0'414\ u^2 = S_2}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Si los determinantes de las matrices cuadradas de orden tres A y 2A son iguales, calcular el determinante de A. ¿Existe la matriz inversa de A?

El determinante de la matriz 2A es 8 veces mayor que el determinante de A. Ello se debe a lo siguiente:

Si se multiplica una matriz por un números resulta otra matriz cuyos elementos quedan multiplicados todos por el número. Por otra parte, si los elementos de una fila o de una columna de un determinante se multiplican o dividen por un número, el valor del determinante queda multiplicado o dividido por el número. Como quiera que la matriz que nos ocupa es de orden 3, resulta:

$$|2 \cdot A| = 8 \cdot |A| = |A| \Rightarrow \underline{\underline{|A| = 0}}$$

El valor del determinante de A, necesariamente, tiene que ser cero.

No existe la matriz inversa de A por ser condición necesaria para que una matriz tenga inversa que su determinante sea distinto de cero.

****

2ª) Hallar el plano π que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$.

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es:

$$s \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = k} \Rightarrow \underline{y = 1 + 2k}$$

$$x - y - z + 2 = 0 \;;;\; x = -2 + y + k = -2 + 1 + 2k + k = \underline{-1 + 3k = x} \Rightarrow \underline{s \equiv \begin{cases} x = -1 + 3k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}}$$

El plano π pedido se puede determinar por los vectores directores de las rectas r y s y por un punto cualquiera de la recta r.

Un punto de r es P(3, 2, 1) y un vector director de r es $\overrightarrow{u} = (1, 2, 3)$.

Un vector director de s es $\overrightarrow{v} = (3, 2, 1)$.

$$\pi(P;\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;;;$$

$$2(x-3) + 9(y-2) + 2(z-1) - 6(z-1) - 6(x-3) - (y-2) = 0 \;;;$$

$$-4(x-3) + 8(y-2) - 4(z-1) = 0 \;;;\; -4x + 12 + 8y - 16 - 4z + 4 = 0 \;;;$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv 4x - 8y + 4z = 0}}$$

****

3ª) Dada la función $f(x)=\dfrac{sen\ x+sen(x+1)}{\cos\ x-\cos(x+1)}$ en el intervalo $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, demostrar, calculando su derivada, que f(x) es constante.

$$f'(x)=\frac{[\cos\ x+\cos(x+1)]\cdot[\cos\ x-\cos(x+1)]-[sen\ x+sen(x+1)]\cdot[-sen\ x+sen(x+1)]}{[\cos\ x-\cos(x+1)]^2}=$$

$$=\frac{\left[\cos^2 x-\cos^2(x+1)\right]-\left[sen^2(x+1)-sen^2\ x\right]}{[\cos\ x-\cos(x+1)]^2}=\frac{\cos^2 x-\cos^2(x+1)-sen^2(x+1)+sen^2\ x}{[\cos\ x-\cos(x+1)]^2}=$$

$$=\frac{\left(\cos^2 x+sen^2\ x\right)-\left[\cos^2(x+1)+sen^2(x+1)\right]}{[\cos\ x-\cos(x+1)]^2}=\frac{1-1}{[\cos\ x-\cos(x+1)]^2}=$$

$$=\frac{0}{[\cos\ x-\cos(x+1)]^2}=\underline{\underline{0=f'(x)}}$$

****

4ª) Hallar a, b, c para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tome valor 0 para x = 1, presente un máximo relativo en x = -1 y un mínimo relativo en x = 0.

$$f(1)=0 \Rightarrow 1+a+b+c=0\ \ ;;\ \ \underline{a+b+c=-1} \qquad (1)$$

$$Máx.\ para\ x=-1 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\ ;\ f'(-1)=0 \rightarrow \underline{3-2a+b=0} \qquad (2)$$

$$Mín.\ para\ x=0 \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b\ ;\ f'(0)=0 \rightarrow \underline{b=0}$$

Sustituyendo el valor de b en las expresiones (1) y (2) y resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+c=-1 \\ 3-2a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a=\frac{3}{2}}\ \ ;;\ \ a+c=-1\ ;;\ \frac{3}{2}+c=-1\ ;;\ 3+2c=-2\ ;;\ 2c=-5\ ;;\ \underline{c=-\frac{5}{2}}$$

La función resultante es la siguiente:

$$\underline{\underline{f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{5}{2}}}$$

****