

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****JUNIO - 2002**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) Sean A, B y X tres matrices cuadradas del mismo orden que verifican lo siguiente: $A \cdot X \cdot B = I$, siendo I la matriz unidad.

a) Si el determinante de A vale -1 y el de B vale 1, calcular razonadamente el determinante de X.

b) Calcular de forma razonada la matriz X si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

a)

$A \cdot X \cdot B = I \Rightarrow$ Multiplicando por la izquierda por A^{-1} y por la derecha por B^{-1} :

$$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot I \cdot B^{-1} \quad ; ; \quad (A^{-1} \cdot A) \cdot X \cdot (B \cdot B^{-1}) = (A^{-1} \cdot I) \cdot B^{-1} \quad ; ;$$

$$I \cdot X \cdot I = A^{-1} \cdot B^{-1} \quad ; ; \quad \underline{X = A^{-1} \cdot B^{-1}}$$

Teniendo en cuenta que el determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes de las matrices y que el determinante de la inversa de una

matriz es igual a la inversa del determinante:

$$|X| = |A^{-1}| \cdot |B^{-1}| = |A|^{-1} \cdot |B|^{-1} = (-1)^{-1} \cdot 1^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot 1 = \underline{\underline{-1}} = |X|$$

b)

Este apartado lo vamos a resolver de dos formas diferentes:

I) Sea $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Entonces: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;;

$$\begin{pmatrix} 2a+3b & 2c+3d \\ 3a+4b & 3c+4d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;;$$

$$\begin{pmatrix} 2a+3b+4c+6d & -4a-6b-6c-9d \\ 3a+4b+6c+8d & -6a-8b-9c-12d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 2a+3b+4c+6d=1 \\ -4a-6b-6c-9d=0 \end{array} \right\} \quad (1) \\ \left. \begin{array}{l} 3a+4b+6c+8d=0 \\ -6a-8b-9c-12d=1 \end{array} \right\} \quad (2) \end{array} \right.$$

Multiplicando en (1) la primera ecuación por 2 y sumando queda: $2c+3d=2$.

Multiplicando en (2) la primera ecuación por 2 y sumando queda: $3c+4d=1$.

Resolviendo el sistema resultante:

$$\left. \begin{array}{l} 2c+3d=2 \\ 3c+4d=1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 6c+9d=6 \\ -6c-8d=-2 \end{array} \Rightarrow \underline{d=4} ; ; 2c+3d=2 ; ; 2c+12=2 ; ; 2c=-10 ; ; \underline{c=-5}$$

Sustituyendo estos valores, por ejemplo, en las primeras ecuaciones de (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} 2a+3b+4c+6d=1 \\ 3a+4b+6c+8d=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c=-5 \\ d=4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2a+3b-20+24=1 \\ 3a+4b-30+32=0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2a+3b=-3 \\ 3a+4b=-2 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} -6a-9b=9 \\ 6a+8b=-4 \end{array} \right\} \Rightarrow -b=5 ; ; \underline{b=-5} ; ; 2a+3b=-3 ; ; 2a-15=-3 ; ; 2a=12 ; ; \underline{a=6}$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}}}$$

II)

Basándonos en el desarrollo del apartado a): $X = A^{-1} \cdot B^{-1}$ (*)

En primer lugar vamos a calcular las inversas de las matrices A y B:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ; ; |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = \underline{-1 = |A|} ; ; A^T = A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj. de } A^T = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} ; ; \underline{A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} ; ; |B| = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = \underline{1 = |B|} ; ; B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Adj. de } B^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} ; ; \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sustituyendo en (*) y operando:

$$X = A^{-1} \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = X}}$$

Como era lógico esperar, se ha obtenido el mismo resultado.

2º) Dada por $F(x) = \int_0^x (t^2 - 1) \cdot e^{-t^2} \cdot dt$, definida para todo $x \in R$.

- a) Calcular $F'(x)$, estudiar el crecimiento de $F(x)$ y hallar las abscisas de sus máximos y mínimos relativos.
 b) Calcular $F''(x)$, estudiar la concavidad y convexidad de $F(x)$ y hallar las abscisas de sus puntos de inflexión.

a)

Por el concepto de integral indefinida : $G(x) = \int g(x) \cdot dx \Leftrightarrow G'(x) = f(x)$.

En nuestro caso sería: $F'(x) = \left[(t^2 - 1) \cdot e^{-t^2} \right]_0^x = \left[(x^2 - 1) \cdot e^{-x^2} \right] - \left[(0^2 - 1) \cdot e^0 \right] =$
 $= \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} - (-1 \cdot 1) = \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} + 1 = F'(x).$ $F'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{e^{x^2}} + 1 = 0 \ ; \ ; \ x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow F'(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow \underline{F(x) \text{ es creciente en su dominio}}$

Como consecuencia de lo anterior, $F(x)$ no tiene máximos ni mínimos relativos; no obstante lo vamos a justificar:

$$F''(x) = \frac{2x \cdot e^{x^2} - (x^2 - 1) \cdot 2x \cdot e^{x^2}}{(e^{x^2})^2} = \frac{2x - (x^2 - 1) \cdot 2x}{e^{x^2}} = \frac{2x(1 - x^2 + 1)}{e^{x^2}} = \frac{2x(2 - x^2)}{e^{x^2}} = F''(x)$$

$F''(0) = 0 \Rightarrow \underline{F(x) \text{ no tiene ni máximo ni mínimo, c.q.j.}}$

b)

$$\underline{\underline{F''(x) = \frac{2x(2 - x^2)}{e^{x^2}}}} \Rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{2} \\ x_3 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

Para estudiar los intervalos de concavidad y convexidad solamente estudiaremos el numerador de la segunda derivada, ya que el denominador es positivo para cualquier valor real de x .

$$F''(x) = \frac{2x(2 - x^2)}{e^{x^2}} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\underline{F''(x) > 0 \Rightarrow (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \Rightarrow (\cup) \Rightarrow \text{Convexa}}} \\ \underline{\underline{F''(x) < 0 \Rightarrow (-\sqrt{2}, 0) \cup (\sqrt{2}, \infty) \Rightarrow (\cap) \Rightarrow \text{Cóncava}}} \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{4x - 2x^3}{e^{x^2}} \Rightarrow F'''(x) = \frac{(4 - 6x^2) \cdot e^{x^2} - 2x(2 - x^2) \cdot 2x \cdot e^{-x^2}}{(e^{x^2})^2} =$$

$$= \frac{(4 - 6x^2) - 2x(2 - x^2) \cdot 2x}{e^{x^2}} = \frac{4 - 6x^2 - 8x + 4x^3}{e^{x^2}} = \frac{2(2x^3 - 3x^2 - 4x + 2)}{e^{x^2}} = \underline{\underline{F'''(x)}}$$

$$F'''(0) = \frac{4}{1} = 4 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \text{ para } x = 0}}$$

$$F'''(\sqrt{2}) = \frac{2(4\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{2} + 2)}{e^2} = \frac{-8}{e^2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \text{ para } x = \sqrt{2}}}$$

$$F'''(-\sqrt{2}) = \frac{2(-4\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{2} + 2)}{e^2} = \frac{-8}{e^2} \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{P.I. \text{ para } x = -\sqrt{2}}}$$

www.yoquieroaprobar.es

CUESTIONES

1ª) Si \vec{u} y \vec{v} son dos vectores del plano con $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, probar que los vectores $(\vec{u} + \vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$ son ortogonales.

Dos vectores son ortogonales cuando su producto escalar es cero. Teniendo en cuenta que el producto escalar de vectores cumple las propiedades conmutativa y distributiva de la multiplicación con respecto a la suma, podemos hacer:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = (\vec{u})^2 - (\vec{v})^2 = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos 0 - |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0 = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$$

En efecto, $(\vec{u} + \vec{v})$ y $(\vec{u} - \vec{v})$ son ortogonales

2ª) Calcular la distancia entre el plano $\pi_1 \equiv x + y - z - 1 = 0$ y el plano π_2 , que es paralelo a π_1 y pasa por el punto A(4, 3, 7).

La distancia entre los planos π_1 y π_2 es la misma que la distancia del punto A al plano π_1 :

La distancia de un punto a un plano es $d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicándola a este caso:

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(A, \pi_1) = \frac{|1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|4 + 3 - 7 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u = \underline{\underline{d(\pi_1, \pi_2)}}$$

www.yoquieroaprobar.es

3ª) Calcular $\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \Rightarrow I = \int \frac{dt}{t^3} = \frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2 \cdot t^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \operatorname{sen}^2 t} + C = I$$

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en el origen de coordenadas y pasa por los focos de la elipse de ecuación: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Se trata de una elipse centrada en los ejes, siendo $\left\{ \begin{array}{l} a^2 = 25 \rightarrow \underline{a = 5} \\ b^2 = 9 \rightarrow \underline{b = 3} \end{array} \right\}$.

La relación fundamental de la elipse es:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = \underline{4 = c}$$

Los focos de la elipse son los puntos F(4, 0) y F'(-4, 0). Si la circunferencia pasa por los focos, su radio es 4, por tanto, la ecuación de la circunferencia pedida es:

$$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 + y^2 - 16 = 0}}$$

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) a) Hallar la recta t que corta a las rectas $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3}$ y $s \equiv \begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases}$ y pasa por el punto $P(-2, 0, -7)$.

b) Calcular la distancia del punto P a la recta r .

a)

En primer lugar determinamos un punto y un vector director de cada una de las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{3} \Rightarrow \underline{A(0, 2, 1)} ; ; \underline{\vec{u} = (2, -3, 3)}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+2y+2=0 \\ 2y+z-5=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z=k} \Rightarrow 2y=5-k ; ; y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}k ; ; x = -2 - 2y = -2 - 5 + k =$$

$$= \underline{-7+k=x} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -7+k \\ y = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \underline{B\left(-7, \frac{5}{2}, 1\right)} ; ; \underline{\vec{v} = (2, -1, 2)}$$

En segundo lugar determinamos los vectores \vec{AP} y \vec{BP} :

$$\vec{AP} = P - A = (-2, 0, -7) - (0, 2, 1) = \underline{(-2, -2, -8) = \vec{AP}}$$

$$\vec{BP} = P - B = (-2, 0, -7) - \left(-7, \frac{5}{2}, 1\right) = \underline{\left(5, -\frac{5}{2}, -8\right) = \vec{BP}}$$

A continuación vamos a determinar los planos π_1 y π_2 del siguiente modo:

$$\pi_1(P; \vec{u}, \vec{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y & z+7 \\ 2 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 0 ; ; \begin{vmatrix} x+2 & y & z+7 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 ; ;$$

$$-12(x+2) + 3y + 2(z+7) + 3(z+7) - 3(x+2) - 8y = 0 ; ; -15(x+2) - 5y + 5(z+7) = 0 ; ;$$

$$3(x+2) + y - (z+7) = 0 ; ; 3x + 6 + y - z - 7 = 0 \Rightarrow \underline{\pi_1 \equiv 3x + y - z - 1 = 0}$$

$$\pi_2(P; \vec{v}, \overrightarrow{BP}) \equiv \begin{vmatrix} x+2 & y & z+7 \\ 2 & -1 & 2 \\ 5 & -\frac{5}{2} & -8 \end{vmatrix} = 0 \quad ;;$$

$$8(x+2) + 10y - 5(z+7) + 5(z+7) + 5(x+2) + 16y = 0 \quad ;; \quad 13(x+2) + 26y = 0 \quad ;;$$

$$(x+2) + 2y = 0 \quad ;; \quad x + 2 + 2y = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\pi_2 \equiv x + 2y + 2 = 0}}$$

La recta t pedida es la que determinan los planos π_1 y π_2 :

$$t \equiv \begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

b)

La distancia de un punto a una recta viene dada por: $d(P, r) = \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|}$, siendo

$A(0, 2, 1)$ un punto de r y $\vec{u} = (2, -3, 3)$ un vector director de la recta r .

$$\begin{aligned} d(P, r) &= \frac{|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & -8 \\ 2 & -3 & 3 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|-6i - 16j + 6k + 4k - 24i + 6j|}{\sqrt{4 + 9 + 9}} = \\ &= \frac{|-30i - 10j + 10k|}{\sqrt{22}} = \frac{10 \cdot |-3i - j + k|}{\sqrt{22}} = \frac{10\sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{\sqrt{22}} = \frac{10\sqrt{9+1+1}}{\sqrt{22}} = \frac{10\sqrt{11}}{\sqrt{22}} = \\ &= \frac{10}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{5\sqrt{2} \text{ unidades} = d(P, r)}} \end{aligned}$$

2º) a) Enunciar la Regla de Barrow.

b) Hallar el área del recinto limitado por las parábolas $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$ y la recta $y = 2x$.

a)

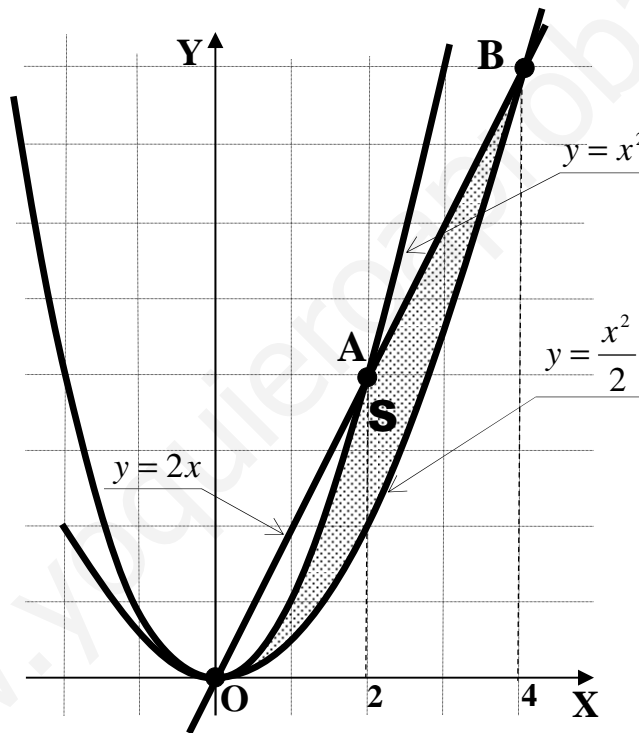
El enunciado de la regla de Barrow es el siguiente:

Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y $F(x)$ es una función primitiva de $f(x)$ en dicho intervalo, entonces se verifica la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

b)

La situación aproximada de la situación es la indicada en la gráfica siguiente:



$$S = \left[\int_0^2 x^2 \cdot dx - \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot dx \right] + \left[\int_2^4 2x \cdot dx - \int_2^4 \frac{x^2}{2} \cdot dx \right] = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) \cdot dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot dx + \int_2^4 \frac{4x - x^2}{2} \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3} - 0 \right) + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(32 - \frac{64}{3} \right) - \left(8 - \frac{8}{3} \right) \right] = \frac{4}{3} + 16 - \frac{32}{3} - 4 + \frac{4}{3} = 12 - \frac{24}{3} = \underline{\underline{4 u^2 = S}}$$

CUESTIONES

1ª) Calcular razonadamente la matriz A sabiendo que se verifica la siguiente igualdad:

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Llamando M a la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, resulta: $A \cdot M = 2 \cdot I$ (*)

La matriz inversa de M es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} ;; |M| = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 ;; M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

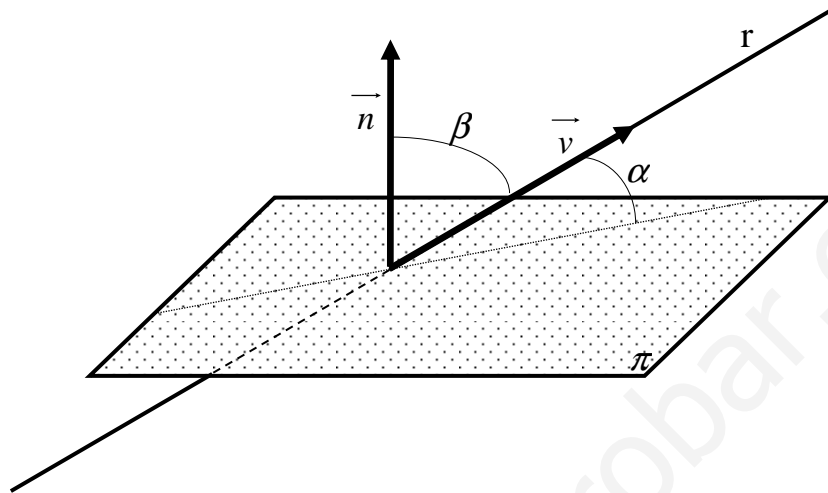
$$Adj(M^T) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la derecha en (*) por M^{-1} , queda:

$$A \cdot M \cdot M^{-1} = 2 \cdot I \cdot M^{-1} ;; A \cdot I = 2 \cdot M^{-1} ;; A = 2 \cdot M^{-1} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = A}}$$

2ª) Calcular el ángulo que forma la recta $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-1}$ con el plano de ecuación $\pi \equiv 2x - 5y + 7z - 11 = 0$.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos un esquema de la situación:



El ángulo α que forman el plano π y la recta r es el complementario del ángulo que forman un vector \vec{v} director de r y un vector \vec{n} , normal al plano π .

Sabiendo que el ángulo que forman dos vectores se deduce del concepto de producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = |\vec{v}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos \beta \Rightarrow \cos \beta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} \quad (*)$$

Un vector director de r puede ser $\vec{v} = (2, 5, -1)$ y un vector normal de π puede ser $\vec{n} = (2, -5, 7)$.

$$\cos \beta = \operatorname{sen} \alpha = \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{(2, 5, -1) \cdot (2, -5, 7)}{\sqrt{2^2 + 5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 7^2}} = \frac{4 - 25 - 7}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{78}} = \frac{-28}{\sqrt{2340}} =$$

$$= 0'5788 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arc. sen} 0'5788 = \underline{\underline{35^\circ 22' 6'' = \alpha}}$$

3ª) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y $g(x) = L(x + 8)$, escribir la función $g \circ f$ y calcular su derivada.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1} \\ g(x) = L(x + 8) \end{array} \right\} \Rightarrow (g \circ f)(x) = g[f(x)] = L(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8) = L\left[(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} + 8\right]$$

$$\underline{\underline{(g \circ f)(x) = L\left[(x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}} + 8\right]}}$$

$$(g \circ f)'(x) = \frac{\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x + 1)}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} = \frac{\frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}}}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} = \frac{2x + 1}{\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2} \cdot (\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8)} =$$

$$\underline{\underline{= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1 + 8\sqrt[3]{x^2 + x + 1})} = (g \circ f)'(x)}}$$

4ª) Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+1}}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow (\text{Aplicando la Regla de L'Hopital}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x+1} e^x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot e^x \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

www.yoquieroaprobar.es