PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2003

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) a) Discutir en función de los valores de m el sistema $\begin{cases} 2x-3y=0 \\ x-y+z=0 \\ x+2y+mz=m \end{cases}$.

b) Resolver en los casos de compatibilidad del sistema anterior.

----

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{pmatrix} \quad y \quad M'=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & m & m \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro m es el siguiente:

$$\left| M \right| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix} = -2m - 3 - 4 + 3m = m - 7 = 0 \;\; ;; \;\; \underline{m = 7}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m \neq 7 \;\Rightarrow Rango\ M \;= Rango\ M' = 3 = n^{o}\ incógnitas \Rightarrow Compatible\ \det er \min ado}}$$

$$\underline{Para \;\; m = 7} \;\Rightarrow\; M' = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; Rango\ \ de\ \ M' \;\Rightarrow\; \{C_1,\ C_2,\ C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = -14 + 21 = 7 \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{Rango\ \ M' = 3}$$

$$\underline{\underline{Para \;\; m = 7 \;\Rightarrow\; Rango\ M \neq Rango\ M' \;\Rightarrow\; Incompatible}}$$

b)

Resolvemos para $m \neq 7$ por la Regla de Cramer:

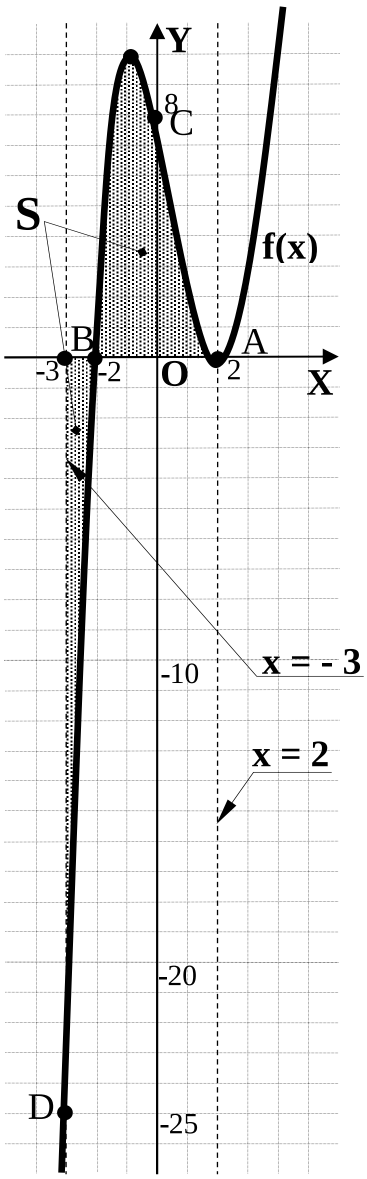
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ m & 2 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}} = \frac{-3m}{\underline{\underline{m-7}}} = x \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ m & m & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-2m}{\underline{\underline{m-7}}} = y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ m & 2 & m \end{vmatrix}}{m-7} = \frac{-2m + 3m}{m-7} = \frac{m}{\underline{\underline{m-7}}} = z$$

****

2º) Hallar el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = (x-2)^2(x+2)$, el eje OX y las rectas x = -3 y x = 2.

Para facilitar la comprensión del ejercicio hacemos una representación gráfica, aproximada, de la situación.



Los puntos de corte de la función con los ejes son los siguientes:

Eje X: A(2, 0) y B(-2, 0). Eje Y: C(0, 8).

Los puntos de corte de la función con las rectas verticales x = -3 y x = 2 son, respectivamente, D(-3, -25) y A(2, 0).

De los datos anteriores se deduce la gráfica de la función, que es la que indica la figura adjunta.

Con objeto de facilitar la realización de la integral indefinida expresamos la función como una expresión polinómica:

$$f(x) = (x-2)^2(x+2) = (x^2-4x+4)(x+2) =$$

$$= x^3+2x^2-4x^2-8x+4x+8 = \underline{x^3-2x^2-4x+8 = f(x)}.$$

El valor de la integral indefinida es la siguiente:

$$F(x) = \int f(x)\cdot dx = \int (x^3-2x^2-4x+8)\cdot dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 8x = \underline{\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 8x = F(x)}.$$

Teniendo en cuenta los intervalos en que las ordenadas de la superficie a calcular son positivas y negativas el área a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-2}^{-3} f(x)\cdot dx + \int_{-2}^{0} f(x)\cdot dx = [F(x)]_{-2}^{-3} + [F(x)]_{-2}^{2} = F(-3) - F(-2) + F(2) - F(-2) =$$

$$= F(-3) - 2F(-2) + F(2) = \left[\frac{(-3)^4}{4} - \frac{2\cdot(-3)^3}{3} - 2\cdot(-3)^2 + 8\cdot(-3)\right] -$$

$$-2\left[\frac{(-2)^4}{4}-\frac{2\cdot(-2)^3}{3}-2\cdot(-2)^2+8\cdot(-2)\right]+\left[\frac{2^4}{4}-\frac{2\cdot 2^3}{3}-2\cdot 2^2+8\cdot 2\right]=$$

$$=\frac{81}{4}+18-18-24-2\cdot\left(4+\frac{16}{3}-8-16\right)+4-\frac{16}{3}-8+16=\frac{81}{4}-24-2\cdot\left(\frac{16}{3}-20\right)+12-\frac{16}{3}=$$

$$=\frac{81}{4}-12-\frac{32}{3}+40-\frac{16}{3}=28+\frac{81}{4}-\frac{48}{3}=\frac{336+243-192}{12}=\frac{579-192}{12}=\frac{387}{12}=\frac{129}{4}\,.$$

$$\underline{\underline{S=\frac{129}{4}\,u^2}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde m es un número real. Encontrar los valores de m para los que A · B es inversible.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m+0 & 3+0+2m\\ 1-m-0 & 3-0-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 3+2m\\ 1-m & 1\end{pmatrix}$$

La condición necesaria y suficiente para que una matriz sea inversible es que su determinante ser distinto de cero:

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1+2m & 3+2m\\ 1-m & 1\end{vmatrix}=1+2m-(1-m)(3+2m)=1+2m-\left(3+2m-3m-2m^2\right)=$$

$$=1+2m-3+m+2m^2=2m^2+3m-2=0$$

$$m=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}\Rightarrow \underline{m_1=\frac{1}{2}}\ ;;\ \underline{m_2=-2}$$

$$\underline{\underline{A\cdot B\ \ es\ \ inversible\ \ \forall m\in R,\ \left\{m\neq\frac{1}{2},\ \ m\neq -2\right\}}}$$

****

2ª) Hallar un vector de módulo uno que sea ortogonal a los vectores $\overrightarrow{u} = (2,\ 2,\ 1)$ y $\overrightarrow{v} = (2,\ 0,\ -1)$.

Sabiendo que el producto vectorial de dos vectores es otro vector perpendicular a ambos, el vector $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ es perpendicular a $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$:

$$\overrightarrow{z} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j - 4k + 2j = -2i + 4j - 4k = \underline{(-2,\ 4,\ -4) = \overrightarrow{z}}$$

El vector pedido es un vector unitario de la misma dirección que $\overrightarrow{z}$, que se llama versor de $\overrightarrow{z}$, y puede haber dos, que son opuestos y se obtienen teniendo en cuenta que un vector dividido por su módulo resulta un versor del vector; son los siguientes:

$$\frac{\overrightarrow{z}}{\left|\overrightarrow{z}\right|} = \pm \frac{(-2,\ 4,\ -4)}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2}} = \pm \frac{(-2,\ 4,\ -4)}{\sqrt{4+16+16}} = \pm \frac{(-2,\ 4,\ -4)}{\sqrt{36}} = \pm \frac{(-2,\ 4,\ -4)}{6} =$$

$$= \pm \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3} \right)$$

$$Soluciones:\ \underline{\underline{\overrightarrow{z_1} = \left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3} \right)}} \quad y \quad \underline{\underline{\overrightarrow{z_2} = \left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3} \right)}}$$

****

3ª) Calcular $\lim_{x \to 0} \{x \cdot [L(x+1) - L\,x]\}$.

$$\lim_{x \to 0} \{x \cdot [L(x+1) - L\,x]\} = 0 \cdot (0 - \infty) = -0 \cdot \infty \Rightarrow Indeterminado \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{L(x+1) - L\,x}{\frac{1}{x}} = \frac{0 - (-\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Indet. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x-x-1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1}{x+1}}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x+1} = \frac{0}{1} = \underline{\underline{0}}$$

****

4ª) Hallar los puntos de la gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en los que la tangente a la curva es paralela a la recta y = x.

Las recta y = x tiene de pendiente 1.

La pendiente a una función en un punto es el valor de la derivada de la función en ese punto:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1.$$

$$m = f'(x) = 1 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 1 \;;;\; 3x^2 - 6x = 0 \;;;\; 3x(x-2) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \;;;\; \underline{x_2 = 2}$$

$$f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{O(0,\ 0)}}$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2 \Rightarrow \underline{\underline{A(2,\ -2)}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2z = a \end{cases}$:

a) Hallar el valor de a para que ambas rectas estén en el mismo plano π.

b) Hallar la ecuación de dicho plano.

----

a)

De la observación de las ecuaciones se deduce que las rectas r y s no son paralelas, por lo cual, para que estén en el mismo plano es necesario que el sistema que forman sea compatible determinado, o sea, que se corten en un punto, que es la solución única del sistema.

El sistema que forman las rectas es $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \\ x + y = 5 \\ x + 2z = a \end{cases}$.

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & a \end{pmatrix}$$

Para que el sistema sea compatible determinado los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada tienen que ser iguales e iguales al número de incógnitas, o sea: 3, lo cual significa que, necesariamente, el determinante de M' tiene que ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_3 \to F_3 - F_1 \\ F_4 \to F_4 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & a \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & a \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 0 \;;\; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 4}}$$

Para demostrar que los rangos de ambas matrices es 3 hemos de comprobar que la matriz de coeficientes tiene un determinante de dimensión 3 x 3 distinto de cero:

$$\{F_1,\ F_2,\ F_3\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2+1=3 \ \Rightarrow \ \underline{Rngo\ \ M = 3}$$

<u>Para a = 4 las rectas r y s son coplanarias.</u>

b)

Para determinar el plano que determinan las rectas r y s las expresamos por ecuaciones paramétricas para determinar un vector director de cada una de ellas y un punto de una cualquiera de ellas:

$$r \equiv \begin{cases} x-2z=0 \\ y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \ \underline{z=\lambda} \ \Rightarrow \ \underline{x=2\lambda} \ ;; \ \underline{y=2+\lambda} \ \Rightarrow \ r \equiv \begin{cases} x=2\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \ \begin{cases} \underline{\overrightarrow{v_r} = (2,\ 1,\ 1)} \\ \\ \underline{P(0,\ 2,\ 0)} \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x+y=5 \\ x+2z=4 \end{cases} \Rightarrow \ \underline{z=\lambda} \ \Rightarrow \ \underline{x=4-2\lambda} \ ;; \ y=5-x=5-4+2\lambda = \underline{1+2\lambda = y} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ s \equiv \begin{cases} x=4-2\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \ \underline{\overrightarrow{v_s} = (-2,\ 2,\ 1)}$$

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{v_s}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y-2 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \ ;; \ x-2(y-2)+4z+2z-2x-2(y-2)=0 \ ;;$$

$$-x-4(y-2)+6z=0 \ ;; \ -x-4y+8+6z=0$$

$$\underline{\underline{\pi \equiv x+4y-6z-8=0}}$$

****

2º) a) Hallar las coordenadas del punto P de la gráfica de la función $y = 2\cos x$ siendo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ con la propiedad de que la suma de la ordenada y la abscisa es máxima.

b) Calcular el área comprendida por la curva $y = 2\cos x$ y la recta y = 1 en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

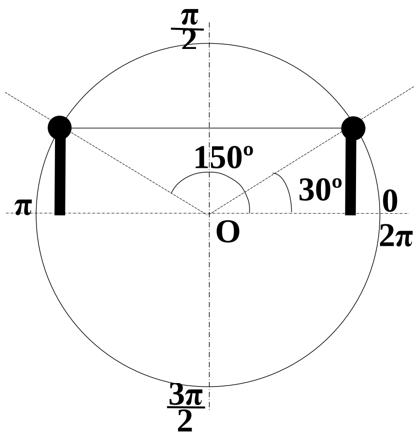
----

a)

El punto P pedido es de la forma $P(x,\ 2\cos x)$.

Tiene que ser $S = x + 2\cos x \ \Rightarrow\ \textit{Máximo}$, por lo cual la derivada tiene que ser 0:

$S' = 1 - 2\,sen\ x = 0\ ;;\ sen\ x = \frac{1}{2}\ \Rightarrow$



$\Rightarrow\ \underline{x = 30^{\circ} = \frac{\pi}{6}}$

La solución de 150º no es válida por no pertenecer al intervalo $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$.

El punto pedido es para $x = \frac{\pi}{6}\ \Rightarrow\ y = 2\cos x = 2\cos\frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$$\underline{\underline{P\left(\frac{\pi}{6},\ \sqrt{3}\right)}}$$

Para justificar que se trata de un máximo, la segunda derivada tiene que ser negativa para el valor de x obtenido:

$$S'' = -2\cos x\ \Rightarrow\ S''\left(\tfrac{\pi}{6}\right) = -2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = -2 \cdot \cos 30^{\circ} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{-\sqrt{3} = S''\left(\tfrac{\pi}{6}\right) < 0,\ c.q.j.}$$

b)

En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$, todas las ordenadas de la función $y = 2\cos x$ son positivas, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos\ x \cdot dx = 2 \cdot [sen\ x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \left[sen\frac{\pi}{2} - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2 \cdot \left(sen\frac{\pi}{2} + sen\frac{\pi}{2}\right) = 4\, sen\frac{\pi}{2} =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{2\ u^2\ = S}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Sean A y B dos matrices cuadradas que verifican que $A \cdot B = B^2$, ¿cuándo se puede asegurar que A = B?

El producto de matrices no cumple la ley de cancelación, es decir: $A \cdot B = A \cdot C$ no implica que B = C.

Por ejemplo: siendo las matrices $A = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-9 & 12+21 \\ 4+3 & -4-7 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}}$$

$$A \cdot C = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-15 & 24+9 \\ 2+5 & -8-3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -21 & 33 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior podemos concluir que:

Si A = B se cumple siempre que $A \cdot B = B^2$.

Existen matrices A tales que si $A \cdot B = B^2$ no tiene por qué ser A = B.

****

2ª) ¿Cuál es el ángulo que forma la recta x = y = z con el eje OX?

La recta x = y = z tiene como vector director $\overrightarrow{v} = (1,\ 1,\ 1)$ y la recta que determina al eje OX tiene como vector director $\overrightarrow{i} = (1,\ 0,\ 0)$.

Teniendo en cuenta que se considera ángulo que forman dos recta al menor ángulo que forman sus vectores directores y que el producto escalar de dos vectores viene dado por la fórmula $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left|\overrightarrow{u}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \cos \alpha$, será:

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{i}}{\left|\overrightarrow{v}\right| \cdot \left|\overrightarrow{i}\right|} = \frac{(1,\ 1,\ 1) \cdot (1,\ 0,\ 0)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{1+0+0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0'5774 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \underline{\underline{\alpha = 54^{\circ}\ \ 44'\ \ 08''}}$$

****

3ª) Utilizando la definición de la derivada, estudiar la derivabilidad de la siguiente función: $f(x) = x \cdot |x-1|$ en x = 1.

Teniendo en cuenta que $|x-1| = \begin{cases} -x+1 & si \;\; x<1 \\ x-1 & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$, la función $f(x) = x \cdot |x-1|$ puede redefinirse de la forma: $f(x) = \begin{cases} -x^2+x & si \;\; x<1 \\ x^2-x & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, estudiamos en primer lugar su continuidad.

Para que sea continua para x = 1 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales, e igual al valor de la función en ese punto:

$$\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(-x^2+x\right) = -1+1 = \underline{0} \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(x^2-x\right) = 1-1 = \underline{0 = f(1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{f(x) \;\; es \;\; contínua \;\; para \;\; x=1}$$

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen la derivada por la izquierda y la derivada por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x+1 & si \;\; x<1 \\ \\ 2x-1 & si \;\; x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(1^-) = -2+1 = \underline{-1} \\ \\ f'(1^+) = 2-1 = \underline{1} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \;\; no \;\; es \;\; derivable \;\; para \;\; x=1}}$$

****

4ª) Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto P(3, 5) y que es tangente a la recta $t \equiv 4x + 3y - 2 = 0$.

El radio de la circunferencia es la distancia del punto P a la recta t.

Para hallar la distancia del punto P a la recta t vamos a determinar una recta s que sea perpendicular a t y pase por P:

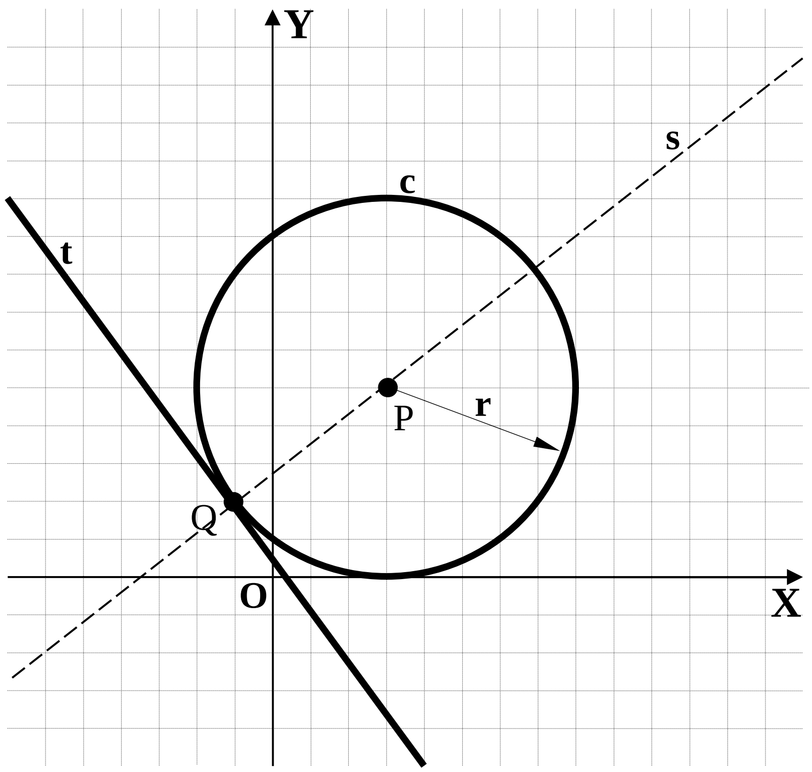
La pendiente de t es $m = -\frac{4}{3}$ y la pendiente de su perpendicular es $m' = \frac{3}{4}$, por lo cual la recta s es:

$$y - 5 = \frac{3}{4}(x - 3) \ ;; \ 4y - 20 = 3x - 9 \ \Rightarrow \ \underline{s \equiv 3x - 4y + 11 = 0}$$

El punto de tangencia Q es la intersección de las rectas t y s:

$$\left.\begin{array}{l} 4x + 3y = 2 \\ 3x - 4y = -11 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 16x + 12y = 8 \\ 9x - 12y = -33 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 25x = -25 \ ;; \ \underline{x = -1} \ ;; \ \underline{y = 2} \ \Rightarrow \ \underline{Q(-1,\ 2)}$$

La representación gráfica aproximada de la situación es la que indica la figura.



$$r = (\overline{PQ}) = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = \underline{5\ u = r}$$

La ecuación de una circunferencia conocido el centro O'(a, b) y radio r viene dado por la fórmula $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$, siendo:

$$\left.\begin{array}{l} A = -2a = -2 \cdot 3 = -6 \\ B = -2b = -2 \cdot 5 = -10 \\ C = a^2 + b^2 - r^2 = 3^2 + 5^2 - 5^2 = 9 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{c \equiv x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0}}$$

****