PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2004

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II — Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "en línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) Sea la función $f(x) = 2\,e^{-2|x|}$.

a) Estudiar su monotonía, extremos relativos y asíntotas.

b) Calcular el área de la región plana comprendida entre la gráfica de la función y las rectas x = 1 y x = -1.

----

a)

La función se puede redefinir de la forma: $f(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & si \quad x \le 0 \\ 2e^{-2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$.

En primer lugar vamos a estudiar la continuidad y derivabilidad en el punto crítico para x = 0 ya que en el resto de su dominio es continua y derivable por tratarse de una función exponencial.

Para que sea continua para x = 0 tiene que cumplirse que los límites por la izquierda y por la derecha sean iguales:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{2x}\right)=\underline{2} \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^{-2x}\right)=\underline{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)}$$

La función es continua en x = 0.

Una función es derivable en un punto si, y solo si, existen las derivadas por la izquierda y por la derecha en ese punto y además, son iguales.

$$f'(x)=\begin{cases}4e^{2x} & si \quad x<0 \\ \\ -4e^{-2x} & si \quad x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'(0^-)=4\cdot 1=\underline{4} \\ \\ f'(0^+)=-4\cdot 1=\underline{-4}\end{cases} \Rightarrow f'(0^-)\neq f'(0^+)$$

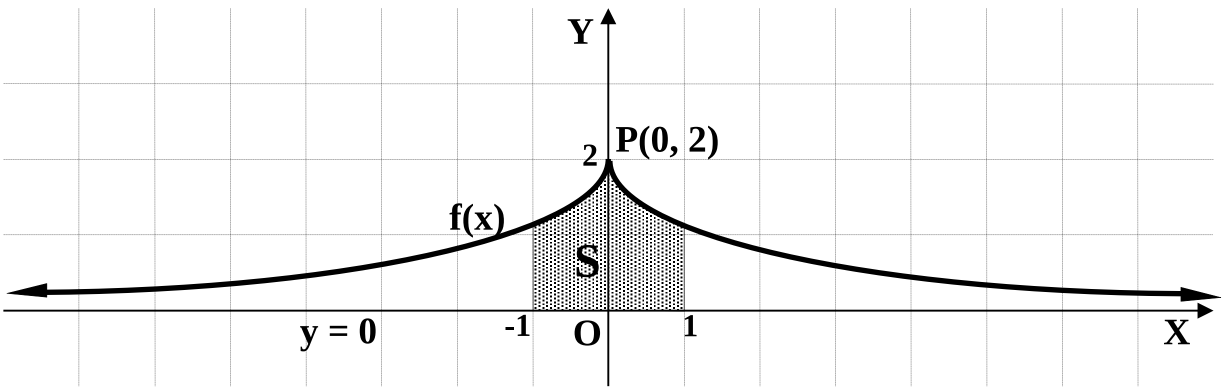
La función no es derivable en x = 0.

En el intervalo $(-\infty,\ 0)$ es $f'(x)>0$ y en el intervalo $(0,\ -\infty)$ es $f'(x)<0$, lo cual significa que:

$$\underline{\underline{(-\infty,\ 0) \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\ es\ \ monótona\ \ creciente}}$$

$$\underline{\underline{(0,\ +\infty) \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\ es\ \ monótona\ \ decreciente}}$$

La gráfica aproximada de la función es la siguiente:



Como puede apreciarse, por el apartado de monotonía y es estudio de su derivabilidad, existe un máximo absoluto para x = 0, a pesar de no ser derivable. Al punto $P(0,\ 2)$ se le llama “anuloso”.

Por el carácter de función exponencial no tiene asíntotas verticales ni oblicuas. Las asíntotas horizontales se obtienen haciendo el límite cuando x tiende a más y menos infinito:

$$\left.\begin{array}{l} y = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2e^{2x}\right) = 2e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \\ \\ y = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(2e^{-2x}\right) = 2e^{-\infty} = \frac{2}{e^{\infty}} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$$

b)

Al tratarse de una función simétrica con respecto al eje Y, (la función no varía al cambiar x por –x), la superficie pedida es el doble de la limitada por la curva y el eje X entre los puntos x = 0 y x = 1:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 2e^{-2x} \cdot dx = 4 \cdot \int_0^1 e^{-2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2x = t \\ dx = -\frac{1}{2}dt \end{array}\right\| \left.\begin{array}{l} x = 1 \to t = -2 \\ x = 0 \to t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = 4 \cdot \int_0^{-2} e^t \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot dt = -2 \cdot \int_0^{-2} e^t \cdot dt = -2 \cdot \left[e^t\right]_0^{-2} = -2 \cdot \left(e^{-2} - e^0\right) = -2 \cdot \left(\frac{1}{e^2} - 1\right) =$$

$$= -2 \cdot \left(\frac{1 - e^2}{e^2}\right) = 2 \cdot \frac{e^2 - 1}{e^2} \cong 2 \cdot \frac{6'39}{7'79} = \underline{\underline{1'73\ u^2 = S}}$$

****

2º) Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$.

a) Expresar la recta r por unas ecuaciones paramétricas.

b) Para cada punto P de r, determinar la ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente al eje OZ.

----

a)

$$r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \Rightarrow \underline{x=\lambda} \Rightarrow \underline{y=-1-\lambda} \;;;\; \underline{z=3+2\lambda}$$

$$\underline{\underline{r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1-\lambda \\ z=3+2\lambda \end{cases}}}$$

b)

Los puntos del eje OZ son de la forma Q(0, 0, z) y, en concreto, las rectas perpendiculares a r que corten a OZ son de la forma $Q(0,\ 0,\ 3+2\lambda)$.

Según lo anterior, las rectas s que pasen por $P(\lambda,\ -1-\lambda,\ 3+2\lambda)$, que es un punto genérico de la recta r, y son perpendiculares a OZ tiene como vector director a:

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{QP} = P - Q = (\lambda,\ -1-\lambda,\ 0).$$

Las rectas pedidas son de la forma:

$$\underline{\underline{s \equiv (x,\ y,\ z) = (\lambda,\ -1-\lambda,\ \lambda) + k(\lambda,\ -1-\lambda,\ 0)}}$$

Por ejemplo: Para $\lambda = 0 \Rightarrow \underline{s \equiv (x,\ y,\ z) = (0,\ -1,\ 0) + k(0,\ -1,\ 0)}$

****

CUESTIONES

1ª) De todas las primitivas de la función $f(x) = 2\,tag\ x \cdot \sec^2 x$, hallar la que pasa por el punto $P\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$.

$$F(x) = \int 2\,tag\ x \cdot \sec^2 x \cdot dx = 2\int \frac{sen\ x}{\cos^3 x} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \cos\ x = t \\ -\,sen\ x \cdot dx = dt \end{array} \right\} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad F(t) = -2\int \frac{dt}{t^3} = -2 \cdot \frac{t^{-2}}{-2} + C = \frac{1}{t^2} + C = F(t) \quad \Rightarrow \quad \underline{F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + C}$$

Como F(x) tiene que pasar por el punto $P\left(\frac{\pi}{4},\ 1\right)$ tiene que ser $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$:

$$F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} + C = \frac{1}{\cos^2 45^{\circ}} + C = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} + C = 2 + C = 1 \ \Rightarrow \ \underline{C = -1}$$

La función pedida es:

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = tag^2\ x}}$$

****

2ª) Demostrar que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto x > 0.

Demostrar que las funciones $f(x)=e^x$ y $g(x)=\frac{1}{x}$ se cortan en un punto es lo mismo que demostrar que la ecuación $e^x=\frac{1}{x}$ tiene al menos una solución, o lo que el lo mismo: que la función $h(x)=e^x-\frac{1}{x}$ tiene al menos una solución.

La función $h(x)=\frac{x \cdot e^x -1}{x}$ es continua en su dominio, que es: $D(h) \Rightarrow R-\{0\}$.

(Lo anterior se deduce que la función h es suma de dos funciones continuas en sus dominios).

Según el teorema de Bolzano, se trata de encontrar dos valores de x, a y b, tales que a >0 y b > 0, que cumplan la condición: h(a) > 0 y h(b) < 0, o viceversa.

$$Por \;\; ejemplo: \left\{a=\frac{1}{2},\; b=1\right\} \Rightarrow \begin{cases} h\left(\frac{1}{2}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}-2<0 \\ h(1)=\dfrac{1\cdot e^1-1}{1}=e-1>0 \end{cases}$$

Lo anterior nos permite asegurar que en el intervalo $\left(\frac{1}{2},\, 1\right)$ las funciones dadas tienen, al menos, un punto de corte.

****

3ª) Se tiene una matriz M cuadrada de orden 3 cuyas columnas son respectivamente C_1, C_2 y C_3 y cuyo determinante vale 2. Se considera la matriz A cuyas columnas son $-C_2$, $C_2 + C_3$, $3C_1$. Calcular razonadamente el determinante de A^{-1} en caso de que exista esa matriz.

$$M = (C_1,\ C_2,\ C_3) \ ;; \ |M| = 2$$

$$A = (-C_2,\ C_2 + C_3,\ 3C_1) \Rightarrow |A| = |-C_2,\ C_2 + C_3,\ 3C_1|$$

$$|A| = |-C_2,\ C_2,\ 3C_1| + |-C_2,\ C_3,\ 3C_1| \qquad (1)$$

$$|A| = 0 + |-C_2,\ C_3,\ 3C_1| = |-C_2,\ C_3,\ 3C_1| \qquad (2)$$

$$|A| = 3 \cdot |-C_2,\ C_3,\ C_1| \qquad (3)$$

$$|A| = 3 \cdot |C_1,\ C_3,\ C_2| = -3 \cdot |C_1,\ C_2,\ C_3| = 3 \cdot |M| = 3 \cdot 2 = \underline{6 = |A|} \qquad (4)$$

Nos hemos basado en las siguientes propiedades de los determinantes:

(1) Si los elementos de una línea de una matriz se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de los dos determinantes obtenidos al considerar por separado cada sumando de esa línea, y el resto de líneas iguales a las del determinante inicial.
(2) Si una matriz tiene dos líneas paralelas proporcionales, su determinante es cero.
(3) Si se multiplican o dividen todos los elementos de una línea de una matriz, su determinante queda multiplicado o dividido por dicho número.
(4) Si se intercambian dos líneas paralelas de una matriz, su determinante cambia de signo.

Teniendo en cuenta que:

$$A \cdot A^{-1} = I,\ \ y \ \ que: \ |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-6} = \underline{\underline{-\frac{1}{6} = |A^{-1}|}}$$

****

4ª) Determinar se el plano $\pi \equiv 2x+3y-4=0$ corta o no al segmento de extremos $A(2,\ 1,\ 3)$ y $B(3,\ 2,\ 1)$.

La recta que pasa por los puntos A y B tiene como vector director el vector:

$$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(3,\ 2,\ 1)-(2,\ 1,\ 3)=(1,\ 1,\ -2)$$

La recta r que contiene a los puntos A y B es:

$$r\left(A,\ \overrightarrow{v}\right)\equiv(x,\ y,\ z)=(2,\ 1,\ 3)+\lambda(1,\ 1,\ -2)$$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es:

$$r\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=3-2\lambda\end{cases}$$

El punto P, intersección de r con el plano π es:

$$P\Rightarrow\{r,\ \pi\}\ \Rightarrow\ 2(2+\lambda)+3(1+\lambda)-4=0\ ;;\ 4+2\lambda+3+3\lambda-4=0\ ;;\ 5\lambda=3\ ;;\ \underline{\lambda=\frac{3}{5}}$$

$$P\ \Rightarrow\begin{cases}x=2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5}\\ y=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}\\ z=3-2\lambda=3-\frac{6}{5}=\frac{9}{5}\end{cases}\Rightarrow\ \underline{P\left(\frac{13}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5}\right)}$$

Para que el punto P pertenezca al segmento $\overline{AB}$, teniendo en cuenta que los tres puntos están alineados, (pertenecen a r los tres), tiene que cumplirse que $\frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\le 1$:

$$\overrightarrow{AP}=P-A=\left(\frac{13}{5},\ \frac{8}{5},\ \frac{9}{5}\right)-(2,\ 1,\ 3)=\left(\frac{3}{5},\ \frac{3}{5},\ -\frac{6}{5}\right)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{9}{25}+\frac{36}{25}}=\frac{\sqrt{54}}{5}=\underline{\frac{3\sqrt{6}}{5}}$$

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(1,\ 1,\ -2)\ \Rightarrow\ \left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1+1+4}=\underline{\sqrt{6}}$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}\le 1\ \Rightarrow\ \frac{\frac{3\sqrt{6}}{5}}{\sqrt{6}}=\frac{3}{5}<1\ \Rightarrow\ \underline{\underline{El\ \ plano\ \ \pi\ \ corta\ \ al\ \ segmento\ \ \overline{AB}}}$$

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Se considera el sistema: $\begin{cases} x+y+z=\lambda \\ x+y+\lambda z=1 \\ x+\lambda y+z=1 \end{cases}$.

a) Discutir el sistema, según los valores de λ.

b) Resolver el sistema para λ = -3.

c) Resolverlo para λ = 1.

----

a)

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \;\;;;\;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \end{vmatrix}=1+\lambda+\lambda-1-\lambda^2-1=2\lambda-\lambda^2-1=-\left(\lambda^2-2\lambda+1\right)=-(\lambda-1)=0 \;\Rightarrow\; \underline{\lambda=1}$$

$$\underline{\underline{Para\ \lambda\neq 1 \;\Rightarrow\; Rango\,M=Rango\ M'=3=n^{o}\ incógnitas \;\Rightarrow\; Compatible\ \det er\min ado}}$$

$Para\ \ m=1\ \ los\ \ rangos\ \ de\ \ M\ \ y\ \ M'\ \ son\ \ 1.$

$$\underline{\underline{Para\ m=1 \;\Rightarrow\; Rango\ M=Rango\ M'=1<n^{o}\ incóg. \;\Rightarrow\; Compatible\ \ in\det er\min ado}}$$

(con dos grados de libertad)

b)

Para λ = - 3 resulta: $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \;\;;;\;\; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}}=\frac{-3-3-3-1+27-1}{1-3-3-1-9-1}=\frac{27-11}{-16}=\frac{16}{-16}=\underline{\underline{-1=x}}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{-16}=\frac{1+1+9-1+3+3}{-16}=\frac{17-1}{-16}=\frac{16}{-16}=\underline{\underline{-1=y}}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}}{-16}=\frac{1+9+1+3+3-1}{-16}=\frac{17-1}{-16}=\frac{16}{-16}=\underline{\underline{-1=z}}$$

c)

Para λ = 1 resulta la ecuación única: $x+y+z=1$, que se resuelve parametrizando dos de las incógnitas, ya que el sistema primitivo tiene dos grados de libertad (diferencia entre el número de ecuaciones y el rango de la matriz resultante):

$$\left.\begin{matrix}\underline{y=\alpha}\\ \underline{z=\beta}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{x=1-\alpha-\beta} \Rightarrow \underline{\underline{Solución: \begin{cases}x=1-\alpha-\beta\\ y=\alpha\\ z=\beta\end{cases} \quad \forall\alpha,\ \beta\in R}}$$

****

2º) Sea $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$. Determinar a, b y c de modo que f(x) tenga un extremo relativo en x = 0, la recta tangente a la gráfica de f(x) en x = 1 sea paralele a la recta r de ecuación r ≡ y – 4x = 0, y el área comprendida por la gráfica de f(x), el eje OX y las rectas x = 0, x = 1, sea igual a 1.

$$f'(x)=3x^2+2ax+b=0 \;\Rightarrow\; f'(0)=0 \;\Rightarrow \underline{\underline{b=0}} \Rightarrow \underline{f(x)=x^3+ax^2+c} \Rightarrow f'(x)=3x^2+2ax$$

$$r \equiv y-4x=0 \;;;\; y=4x \;\Rightarrow\; m=4 \;\Rightarrow\; f'(1)=4 \;\Rightarrow\; 3\cdot 1^2+2a\cdot 1=4 \;;;\; 3+2a=4 \;;;\; \underline{\underline{a=\frac{1}{2}}}$$

Con los datos obtenidos resulta la función: $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+c$.

Tenemos que suponer que todas las ordenadas de f(x) en el intervalo (0, 1) son positivas o negativas, cosa que no puede determinarse si no se conoce el valor de c.

$$S=\int_0^1 f(x)\cdot dx=\int_0^1\left(x^3+\frac{1}{2}x^2+c\right)\cdot dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{6}+cx\right]_0^1=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+c\right)-0=1 \;;;$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+c=1 \;;;\; 3+2+12c=12 \;;;\; 12c=7 \;;;\; \underline{\underline{c=\frac{7}{12}}}$$

$$\underline{\underline{f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{7}{12}}}$$

****

CUESTIONES

1ª) Calcular $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sen\ x} \right)$.

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{sen\ x} \right) = \infty - \infty \Rightarrow In\det. \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{sen\ x - x}{x \cdot sen\ x} = \frac{0}{0} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{\cos\ x - 1}{sen\ x + x \cdot \cos\ x} = \frac{0}{0} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{-sen\ x}{\cos\ x + \cos\ x - x\,sen\ x} =$$

$$= \frac{-0}{2-0} = \underline{\underline{0}}$$

****

2ª) Calcular $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} \cdot dx$.

$$I = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{\sqrt{x}} \cdot dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} - 2\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cdot dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right) \cdot dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 2\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + C =$$

$$= \underline{\underline{\frac{2\sqrt{x}}{15}\left(3x^2 - 10x + 15\right) + C = I}}$$

****

3ª) Hallar la ecuación del plano π' que contiene a la recta $r \equiv x = y = z$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$.

El plano π' se puede determinar por un punto de la recta r, por ejemplo, O(0, 0, 0) y los dos siguientes vectores directores:

1.- $\overrightarrow{v_r}$ director de la recta r: $\overrightarrow{v_r} = (1,\ 1,\ 1)$.

2.- $\overrightarrow{n}$ normal al plano π: $\overrightarrow{n} = (1,\ 1,\ -1)$.

$$\pi'(O;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{n}) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \ ;;\ -x + z + y - z - x + y = 0 \ ;;\ -2x + 2y = 0$$

$$\underline{\underline{\pi' \equiv x - y = 0}}$$

****

4ª) Dada la matriz $B=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, hallar una matriz X tal que: X · B + B = B^{-1}.

Este problema lo vamos a resolver de dos formas diferentes:

1ª) $B=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$. *Supongamos que* $B^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Por definición de inversa de una matriz se cumple que:

$$B\cdot B^{-1}=I\ \Rightarrow\ \begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}c & \frac{2}{3}b-\frac{1}{3}d\\ -\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}c & -\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}c=1\\ -\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}c=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2a-c=3\\ -a+2c=0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4a-2c=6\\ -a+2c=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3a=6\ ;;\ \underline{a=2}\ ;;\ 4-c=3\ ;;\ \underline{c=1}$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{2}{3}b-\frac{1}{3}d=0\\ -\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}d=1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2b-d=0\\ -b+2d=3\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4b-2d=0\\ -b+2d=3\end{array}\right\}\Rightarrow 3b=3\ ;;\ \underline{b=1}\ ;;\ 2-d=0\ ;;\ \underline{d=2}$$

$$\underline{B^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}}$$

$$\textit{Haciendo}\ \ X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & p\end{pmatrix}\Rightarrow X\cdot B+B=B^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}x & y\\ z & p\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y & -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y\\ \frac{2}{3}z-\frac{1}{3}p & -\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}p\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\ \Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}=2\\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}=1\end{array}\right\}\\ \left.\begin{array}{r}\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}=1\\ -\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}p+\frac{2}{3}=2\end{array}\right\}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}=2\\ -\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}=1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2x-y+2=6\\ -x+2y-1=3\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2x-y=4\\ -x+2y=4\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4x-2y=8\\ -x+2y=4\end{array}\right\}\Rightarrow 3x=12\ ;;\ \underline{x=4}\ ;;\ \underline{y=4}$$

$$\left.\begin{array}{r}\frac{2}{3}z-\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}=1\\ -\frac{1}{3}z+\frac{2}{3}p+\frac{2}{3}=2\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2z-p-1=3\\ -z+2p+2=6\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}2z-p=4\\ -z+2p=4\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}4z-2p=8\\ -z+2p=4\end{array}\right\}\Rightarrow 3z=12\ ;;\ \underline{z=4}\ ;;\ \underline{p=4}$$

$$\underline{\underline{X=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}}}$$

2ª.- Por un procedimiento más práctico y rápido:

$$X \cdot B + B = B^{-1}$$

Restando B a los dos términos: $X \cdot B = B^{-1} - B$.

Multiplicando los dos términos por la derecha por B^{-1}:

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = \left(B^{-1} - B\right) \cdot B^{-1} \;\; ;; \;\; X \cdot I = \left(B^{-1} - B\right) \cdot B^{-1} \;\; ;; \;\; X = \left(B^{-1} - B\right) \cdot B^{-1} \qquad (*)$$

Sabiendo que $B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ y que $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Haciendo operaciones:

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} + \frac{4}{3} & \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} + \frac{4}{3} & \frac{4}{3} + \frac{8}{3} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = X}}$$

****