PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

SEPTIEMBRE - 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) a) Calcúlense los valores de a para los cuales las rectas $r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + a\lambda \end{cases}$ son perpendiculares.

b) Para a = 1, calcúlese la recta t que pasa por P(1, 1, 1) y se apoya en r y s.

En primer lugar expresamos la recta s mediante unas ecuaciones paramétricas para determinar un vector director:

$$r \equiv \begin{cases} 3x + ay - 6az + 1 = 0 \\ -x + y + 3z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{z = \lambda} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + ay = -1 + 6a\lambda \\ -x + y = 3 - 3\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + ay = -1 + 6a\lambda \\ -3x + 3y = 9 - 9\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+3)y = 8 + (6a-9)\lambda \;\;;;\;\; y = \frac{8 + (6a-9)\lambda}{a+3} = \underline{\frac{8}{a+3} + \frac{3(2a-3)}{a+3}\lambda = y}$$

$$-x+y=3-3\lambda \;;;\; x=y-3+3\lambda=\frac{8+(6a-9)\lambda}{a+3}-3+3\lambda=$$

$$=\frac{8+(6a-9)\lambda-3(a+3)+3\lambda(a+3)}{a+3}=\frac{8+6a\lambda-9\lambda-3a-9+3a\lambda+9}{a+3}=\underline{\frac{8-3a}{a+3}+\frac{9(a-1)}{a+3}\lambda}$$

$$r\equiv\begin{cases} x=\dfrac{8-3a}{a+3}+\dfrac{9(a-1)}{a+3}\lambda \\ y=\dfrac{8}{a+3}+\dfrac{3(2a-3)}{a+3}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{\overrightarrow{v_r}=\left(\frac{9(a-1)}{a+3},\ \frac{3(2a-3)}{a+3},\ 1\right)}$$

Un vector director de s es $\underline{\overrightarrow{v_s}=(-1,\ 1,\ a)}$.

Para que las rectas r y s sean perpendiculares es condición necesaria y suficiente que el producto escalar de sus vectores directores sea cero:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=0 \Rightarrow \left[\frac{9(a-1)}{a+3},\ \frac{3(2a-3)}{a+3},\ 1\right]\cdot(-1,\ 1,\ a)=0 \;;;\; -\frac{9(a-1)}{a+3}+\frac{3(2a-3)}{a+3}+a=0 \;;;$$

$$-9a+9+6a-9+a^2+3a=0 \;;;\; a^2=0 \Rightarrow \underline{\underline{a=0}}$$

b) Para a = 1 $\Rightarrow r\equiv\begin{cases}3x+y-6z+1=0\\ -x+y+3z-3=0\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=3+\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases}$

La recta t es la intersección de los planos π_1 y π_2, siendo π_1 el plano que pasa por P y contiene a r y π_2 el plano que pasa por P y contiene a s.

Determinamos un vector director de r:

$$\overrightarrow{v_r}=\left(\frac{9(a-1)}{a+3},\ \frac{3(2a-3)}{a+3},\ 1\right).\ \ Para\ \ a=1 \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\left(0,\ -\frac{3}{4},\ 1\right)\ o\ \underline{\overrightarrow{v_r}=(0,\ -3,\ 4)}$$

Un punto de r es, p. e., para a = 1, $A\left(\frac{5}{4},\ 2,\ 0\right)$.

El vector $\overrightarrow{AP}=P-A=(1,\ 1,\ 1)-\left(\frac{5}{4},\ 2,\ 0\right)=\left(-\frac{1}{4},\ -1,\ 1\right)$.

$$\pi_1\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{AP}\right)\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & -3 & 4\\ -\frac{1}{4} & -1 & 1\end{vmatrix}=0 \;;;\; \pi_1\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{AP}\right)\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y-1 & z-1\\ 0 & -3 & 4\\ -1 & -4 & 4\end{vmatrix}=0 \;;;$$

$$-12(x-1)-4(y-1)-3(z-1)+16(x-1)=0 \;;;\; 4(x-1)-4(y-1)-3(z-1)=0 \;;;$$

$$4x-4-4y+4-3z+3=0 \;;;\; \underline{\pi_1\equiv 4x-4y-3z+3=0}$$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_s} = (-1,\ 1,\ 1)$ y un punto de s es, p. e., B(-1, 3, 1).

El vector $\overrightarrow{BP} = P - B = (1,\ 1,\ 1) - (-1,\ 3,\ 1) = (2,\ -2,\ 0)$.

$$\pi_2\left(P;\ \overrightarrow{v_r},\ \overrightarrow{BP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ 2(z-1)+2(y-1)-2(z-1)+2(x-1)=0\ ;;$$

$$2(x-1)+2(y-1)=0\ ;;\ x-1+y-1=0\ ;;\ \underline{\pi_2 \equiv x+y-2=0}$$

$$\underline{\underline{t \equiv \begin{cases} 4x-4y-3z+3=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}}}$$

****

2º) a) Estúdiese la derivabilidad de $f(x) = \begin{cases} L(1+x^2) & para \quad x>0 \\ x^2 & para \quad x \le 0 \end{cases}$, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y sus puntos de inflexión. Esbócese su gráfica.

b) Calcúlese el área limitada por la gráfica de f(x) y las rectas x = -1, x = 1, y = 0.

CUESTIONES

1ª) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. Calcúlese el determinante de A sabiendo que se cumple que $A^2 - 2A + I = 0,$ donde I es la matriz identidad y 0 es la matriz nula.

2ª) Discútase, según el valor de a, el rango de la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$.

3ª) Calcúlese el punto simétrico de P(1, 1, 1) respecto al plano $\pi \equiv x+y+z=0$.

4ª) Calcúlense los valores de $\lambda \neq 0$ para los cuales $\lim_{x \to 0} \frac{sen\ x^2}{\cos^2(\lambda x) - 1} = -1$.

****

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) Sea k un número real. Considérese el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} kx+y+z=1 \\ x+ky+z=k \\ x+y+kz=k^2 \end{cases}$

a) Discútase según los valores de k e interprétese geométricamente el resultado.

b) Resuélvase el sistema para k = 2.

2º) Sea $P(a,\ sen\ a)$ un punto de la gráfica de la función $f(x) = sen\ x$ en el intervalo $[0,\ \pi]$. Sea r la recta tangente a dicha gráfica en el punto P y S el área de la región determinada por las rectas $r,\ x=0,\ x=\pi,\ y=0$. Calcúlese el punto P para el cuál el área S es mínima. (Nota: puede asumirse sin demostrar que la recta r se mantiene por encima del eje OX entre 0 y π).

CUESTIONES

1ª) Calcúlese $I = \int \frac{1}{x^2+4x+13} \cdot dx$.

2ª) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Determínense los valores de m para los cuales $M = A + m \cdot I$ no es inversible (donde I denota la matriz identidad)

3ª) Calcúlese $\lim_{x \to 0} (L\,x \cdot sen\ x)$.

4ª) Calcúlese el volumen del tetraedro de vértices son los puntos $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(1,\ 2,\ 3)$, $C(2,\ 3,\ 1)$ y $D(3,\ 1,\ 2)$.

****