

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****JUNIO – 2005**

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) a) Discutir el sistema
$$\left. \begin{array}{l} x + ay - z = 2 \\ 2x + y + az = 0 \\ 3x + (a+1)y - z = a-1 \end{array} \right\}, \text{ en función del valor de } a.$$

b) Para el valor de $a = 1$, hállese, si procede, la solución del sistema.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{pmatrix};; M' = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2a - 2 + 3a^2 + 3 + 2a - a(a+1) = 2 + 3a^2 - a^2 - a =$$

$$= 2a^2 - a = 0 \quad ;; \quad a(2a - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incógnitas} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Compatible det er min ado}}}$$

Para $a = 0$ el rango de M' es:

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 6 = -2 \neq 0 \Rightarrow \text{Rango } M' = 3$$

Para $a = \frac{1}{2}$ el rango de M' es:

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + 6 - 6 + \frac{1}{2} = 0$$

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - 4 - 3 - 1 \neq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Rango } M' = 3$$

$$\text{Para } \begin{cases} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \underline{\underline{\text{Incompatible}}}$$

b)

Resolviendo para $a = 1$, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2 - 4}{-1 - 4 + 3 + 3 - 2 + 2} = \frac{-6}{1} = \underline{\underline{-6 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{6 + 4}{1} = \frac{10}{1} = \underline{\underline{10 = y}} \quad ;; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{8 - 6}{1} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2 = z}}$$

2º)

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Esbozar la gráfica de f y calcular $\int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx$.

a)

Se trata de una función par, $\{f(x) = f(-x)\}$, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

$$f'(x) = -2x \cdot e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \underline{x=0} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Decreciente}}} \\ x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Creciente}}} \end{cases}$$

$$f''(x) = -2(1 \cdot e^{1-x^2} - x \cdot 2x \cdot e^{1-x^2}) = 2e^{1-x^2}(2x^2 - 1)$$

$$f''(0) = -2e < 0 \Rightarrow \text{Máximo para } x=0 ;; f(0) = e \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo}(0, e)}}$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 ;; x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$f'''(x) = 2[-2x \cdot e^{1-x^2}(2x^2 - 1) + e^{1-x^2} \cdot 4x] = \underline{4xe^{1-x^2}(3 - 2x^2) = f'''(x)}$$

$$f'''(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow \text{P. I. para } x = \frac{\sqrt{2}}{2} ;; f(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{e} \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})}}$$

$$\text{Por simetría} \Rightarrow \underline{\underline{\text{P. I.}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e})}}$$

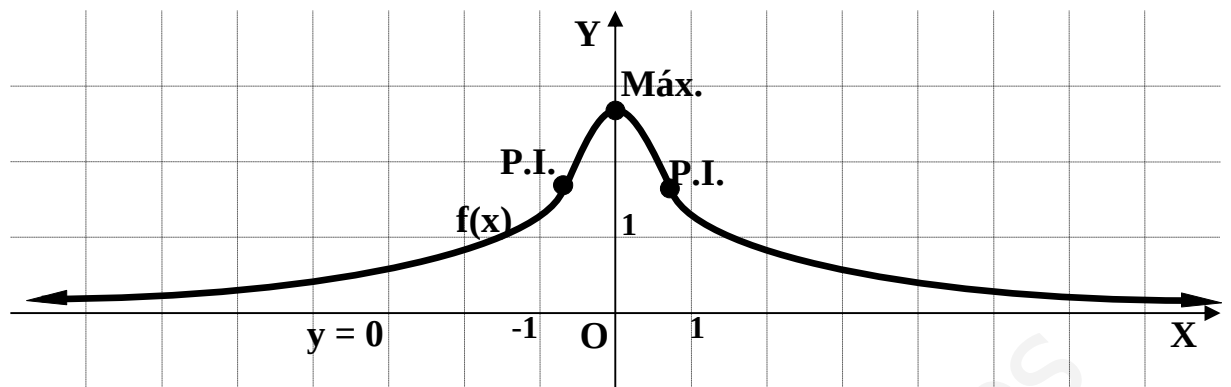
Las posibles asíntotas que puede tener la función son paralelas al eje de abscisas:

$$y = k = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{1-x^2} = e^{-\infty} = \underline{0}$$

El eje X es asíntota de la función.

b)

La gráfica de $f(x) = e^{1-x^2}$, teniendo en cuenta lo anterior es, aproximadamente, como indica la siguiente figura:



$$S = \int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^3 x \cdot e^{1-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x = 3 \rightarrow t = -8 \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2} \int_0^{-8} e^t \cdot dt = -\frac{1}{2} [e^t]_0^{-8} = -\frac{1}{2} (e^{-8} - e^0) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^8} - 1 \right) = \frac{e^8 - 1}{2e^8} \cong \frac{1}{2} u^2 = S$$

CUESTIONES

1ª) Sea A una matriz 2x2 de columnas C_1, C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2x2 de determinante 2. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcular el determinante de la matriz $B \cdot C^{-1}$.

$$A = (C_1, C_2) \;; \; |A| = |C_1, C_2| = 4 \;; \; |B| = 2$$

$$|C| = |C_1 + C_2, 3C_2| = |C_1, 3C_2| + |C_2, 3C_2| = 3 \cdot |C_1, C_2| + 0 = 3 \cdot |A| = 3 \cdot 4 = \underline{12}$$

$$|C_2, 3C_2| = 0 \text{ por tener dos columnas proporcionales.}$$

$$|B \cdot C^{-1}| = |B| \cdot |C^{-1}| = |B| \cdot \frac{1}{|C|} = 2 \cdot \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

2ª) Calcular la distancia del origen al plano π que pasa por A(1, 2, 0) y contiene a la recta $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

El vector director de la recta r es $\vec{v} = (2, 3, 1)$, y un punto de r es P(-2, 1, 0).

El plano π puede determinarse por los vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{AP}$ y contener al punto A.

$$\vec{AP} = P - A = (-2, 1, 0) - (1, 2, 0) = (-3, -1, 0).$$

$$\pi(A; \vec{v}, \vec{AP}) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad -3(y-2) - 2z + 9z + (x-1) = 0 \quad ;$$

$$-3y + 6 + 7z + x - 1 = 0 \quad ; \quad \underline{\pi \equiv x - 3y + 7z + 5 = 0}$$

Sabiendo que la distancia de un plano al origen es: $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(O, \pi) = \frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 7^2}} = \frac{5}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{5}{\sqrt{59}} = \frac{5\sqrt{59}}{59} \text{ u} = d(O, \pi)$$

3ª) Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot L x}{e^x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot L x}{e^x} = \frac{\infty \cdot \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow (L' \text{ Hopital}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 \cdot L x + x \cdot \frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{L x + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow (L' \text{ Hopital}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

4ª) Aplicando el Teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demostrar que para $x > 0$ se verifica: $\arctan(2x) - \arctan x < \frac{x}{1+x^2}$.

El Teorema del valor medio o de Lagrange, dice:

Si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces existe al menos un punto $c \in (a, b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Considerando la función $f(x) = \arctan(2x) - \arctan x - \frac{x}{1+x^2}$.

$f(x)$ cumple las hipótesis del Teorema de Lagrange por tratarse de una función que es la suma algebraica de tres funciones continuas en $[0, n]$ y derivables en $(0, n)$, $\forall n \in \mathbb{R}, n > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{1+(2x)^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1 \cdot (1+x^2) - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2(1+x^2)^2 - 2(1+4x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \frac{2(1+2x^2+x^4)^2 - 2(1+4x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \frac{2(1+2x^2+x^4-1-4x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \\ &= \frac{2(x^4-2x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \frac{2x^2(x^2-2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = f'(x) \end{aligned}$$

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) a) Determinar el punto A', simétrico de A(-3, 1, -7) respecto de la recta r de ecuación: $r \equiv x+1 = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$.

b) Hallar la distancia de A a r.

a)

El plano π , perpendicular a r por A, es el que tiene como vector normal a un vector director de r, por ejemplo, $\vec{v} = (1, 2, 2)$, y contiene al punto A:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x + 2y + 2z + D = 0 \\ A(-3, 1, -7) \end{array} \right\} \Rightarrow -3 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 7 + D = 0 \;; \; -3 + 2 - 14 + D = 0 \;; \; \underline{D = 15}$$

$$\underline{\pi \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x + 2y + 2z + 15 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = 3 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow (-1 + \lambda) + 2(3 + 2\lambda) + 2(-1 + 2\lambda) + 15 = 0 \;;$$
$$-1 + \lambda + 6 + 4\lambda - 2 + 4\lambda + 15 = 0 \;; \; 9\lambda = -18 \;; \; \underline{\lambda = -2} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = -5 \end{cases} \Rightarrow N(-3, -1, -5)$$

Para que A' sea el punto simétrico de A con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NA'} \Rightarrow N - A = A' - N \;; \; (-3, -1, -5) - (-3, 1, -7) = (x, y, z) - (-3, -1, -5) \;;$$

$$(0, -2, 2) = (x + 3, y + 1, z + 5) \Rightarrow \begin{cases} x + 3 = 0 \rightarrow \underline{x = -3} \\ y + 1 = -2 \rightarrow \underline{y = -3} \\ z + 5 = 2 \rightarrow \underline{z = -3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A'(-3, -3, -3)}}$$

b)

La distancia de un punto A a una recta r es: $d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{QA} \wedge \vec{v}|}{|\vec{v}|}$, donde Q es un punto cualquiera de la recta r.

Un punto de la recta r puede ser $Q(-1, 3, -1)$, con lo cual:

$$\overrightarrow{QA} = A - Q = (-3, 1, -7) - (-1, 3, -1) = (-2, -2, -6).$$

$$d(A, r) = \frac{\left\| \begin{array}{ccc} i & j & k \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \right\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|-4i - 6j - 4k + 2k + 12i + 4j|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{|8i - 2j - 2k|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{64 + 4 + 4}}{3} = \frac{2\sqrt{16 + 1 + 1}}{3} = \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{2\sqrt{2} \text{ u} = d(A, r)}}$$

Nota: Este apartado podía hacerse de forma más sencilla: teniendo en cuenta que la distancia es la misma que entre los puntos A y N.

2º) Sea $f(x) = e^x + Lx$, $x \in (0, \infty)$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas.

b) Probar que f tiene un punto de inflexión en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ y esbozar la gráfica de f .

a)

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$. Por ser $x > 0$, no existe ningún valor real de x para el cual se anule la derivada, por lo tanto:

$$f'(x) > 0, \forall x > 0 \Rightarrow \underline{\underline{f(x) \text{ es monótona creciente}}}$$

La función no tiene asíntotas verticales ni oblicuas por no ser racional y tampoco tiene asíntotas horizontales por ser $x \rightarrow \infty$, $f(x) \rightarrow \infty$.

b)

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \quad ;; \quad f''(x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{x^2}$$

CUESTIONES

1ª) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$, hallar las matrices X que satisfacen $X \cdot C + A = C + A^2$.

$$X \cdot C + A = C + A^2 \quad ;; \quad X \cdot C = C + A^2 - A \quad ;; \quad X \cdot C = C + A(A - I) \quad ;;$$

$$X \cdot C \cdot C^{-1} = [C + A(A - I)] \cdot C^{-1} \quad ;; \quad X \cdot I = [C + A(A - I)] \cdot C^{-1} \quad ;;$$

$$X = [C + A(A - I)] \cdot C^{-1} \quad (*)$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (A - I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (*), resulta:

$$X = [C + A(A - I)] \cdot C^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cdot C^{-1} = C \cdot C^{-1} = \underline{\underline{I = X}}$$

Teniendo en cuenta que $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A$, la expresión dada puede ponerse de la forma:

$$X \cdot C + A = C + A^2 \quad ;; \quad X \cdot C = C \Rightarrow \underline{\underline{X = I}}$$

2ª) Dados el punto $A(3, 5, -1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+1}{4}$, hallar el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de r es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$, por lo

cual su punto general es: $B(1+2\lambda, -2+\lambda, -1+4\lambda)$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene las siguientes componentes: $\overrightarrow{AB} = (2-2\lambda, 7-\lambda, -4\lambda)$.

Para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano π tiene que ser perpendicular al vector normal al plano, que es $\vec{n} = (3, -2, 1)$.

Teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow (2-2\lambda, 7-\lambda, -4\lambda) \cdot (3, -2, 1) = 0 \;;$$

$$6 - 6\lambda - 14 + 2\lambda - 4\lambda = 0 \;; \; -8 - 8\lambda = 0 \;; \; \underline{\lambda = -1}$$

El punto B resulta ser: $B(-1, -3, -5)$.

3ª) Estudiar, según los valores de los números reales α y β , la continuidad de la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \alpha}{1 + x^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para $x = 0$, por lo tanto, para determinar su continuidad basta con estudiarla para este valor.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \alpha}{1 + x^{\frac{1}{x}}} = \frac{\alpha}{1 + 0^{\infty}} \Rightarrow \text{Indeterminado}$$

Para determinar la indeterminación hacemos lo siguiente:

$$1 + x^{\frac{1}{x}} = y \quad ; \quad y - 1 = x^{\frac{1}{x}} \quad ; \quad L(y - 1) = \frac{1}{x} Lx = \frac{Lx}{x} \Rightarrow (\text{Tomando límites para } x \rightarrow 0) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} L y = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Lx}{x} = \frac{-\infty}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow (L' \text{ Hopital}) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$$

4ª) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones:

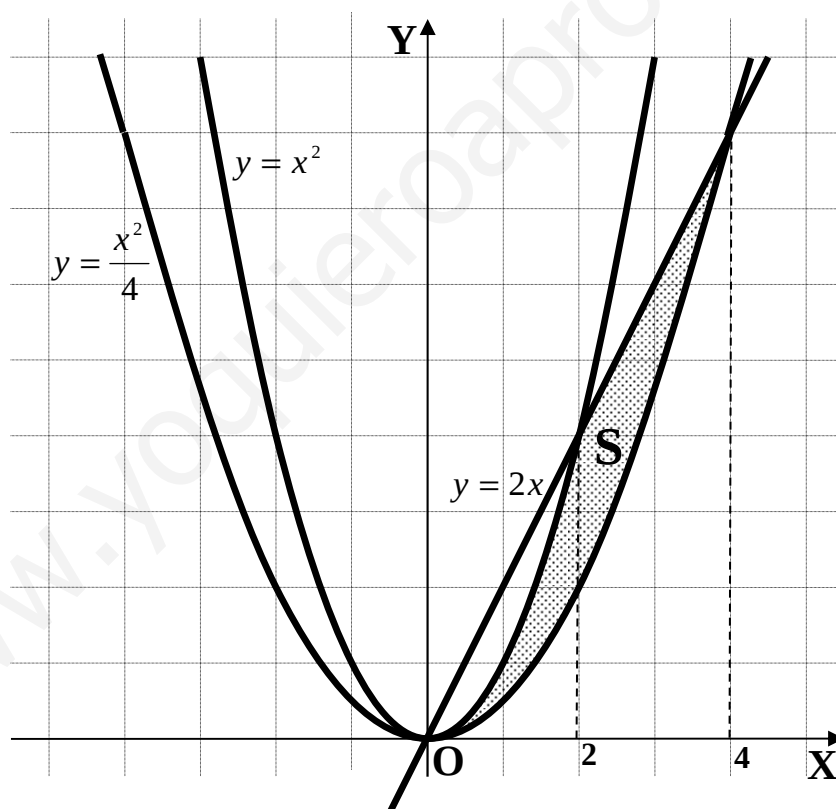
$$y = x^2, \quad y = \frac{x^2}{2}, \quad y = 2x.$$

Los puntos de corte de la recta con cada una de las parábolas son los siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 = 2x \quad ;; \quad x^2 - 2x = 0 \quad ;; \quad x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2, 4)} \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 2x \quad ;; \quad x^2 - 4x = 0 \quad ;; \quad x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0, 0)} \\ x_3 = 4 \rightarrow \underline{B(4, 8)} \end{cases}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{12} \right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{12} \right) - 0 + \left[\left(16 - \frac{64}{12} \right) - \left(4 - \frac{8}{12} \right) \right] = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} + 16 - \frac{16}{3} - 4 + \frac{2}{3} = 12 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{28}{3} u^2 = S}}$$
