PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)

UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN

JUNIO – 2005

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora “en línea”. No se admitirá el uso de memoria para texto, ni las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A

PROBLEMAS

1º) a) Discutir el sistema $\left.\begin{array}{r} x+ay-z=2 \\ 2x+y+az=0 \\ 3x+(a+1)y-z=a-1 \end{array}\right\}$, en función del valor de a.

b) Para el valor de a = 1, hállese, si procede, la solución del sistema.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{pmatrix} ;;\ M'=\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 3 & a+1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2 & 1 & a \\ 3 & a+1 & -1 \end{vmatrix}=-1-2a-2+3a^2+3+2a-a(a+1)=2+3a^2-a^2-a=$$

$$= 2a^2 - a = 0 \;\;;;\;\; a(2a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \underline{a_1 = 0} \\ \underline{a_2 = \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M = Rango\;\; M' = 3 = n^o \;\; incógnitas \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Compatible\;\; determinado}}$$

$Para\;\; a = 0\;\; el\;\; rango\;\; de\;\; M'\;\; es:$

$$M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4 - 6 = -2 \neq 0 \;\Rightarrow\; Rango\;\; M' = 3$$

$Para\;\; a = \frac{1}{2}\;\; el\;\; rango\;\; de\;\; M'\;\; es:$

$$\left. \begin{aligned} &M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} + 6 - 6 + \frac{1}{2} = 0 \\ &M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - 4 - 3 - 1 \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Rango\;\; M' = 3$$

$$Para \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rango\, M \neq Rango\;\; M' \;\Rightarrow\; \underline{\underline{Incompatible}}$$

b)

Resolviendo para a = 1, aplicando la Regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2-4}{-1-4+3+3-2+2} = \frac{-6}{1} = \underline{\underline{-6 = x}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{6+4}{1} = \frac{10}{1} = \underline{\underline{10 = y}} \quad ;; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{8-6}{1} = \frac{2}{1} = \underline{\underline{2 = z}}$$

****

2º)

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=e^{1-x^2}$, sus extremos relativos, puntos de inflexión y asíntotas.

b) Esbozar la gráfica de f y calcular $\int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx$.

----

a)

Se trata de una función par ,$\{f(x)= f(-x)\}$, por lo cual es simétrica con respecto al eje de ordenadas.

$$f'(x)=-2x \cdot e^{1-x^2} \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \underline{x=0} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \Rightarrow f'(x)<0 \Rightarrow \underline{\underline{Decreciente}} \\ \\ x<0 \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow \underline{\underline{Creciente}} \end{cases}$$

$$f''(x)=-2\left(1 \cdot e^{1-x^2} - x \cdot 2x \cdot e^{1-x^2}\right)=2e^{1-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

$$f''(0)=-2e<0 \Rightarrow Máximo \ \ para \ \ x=0 \ ;; \ f(0)=e \Rightarrow \underline{\underline{Máximo(0,\ e)}}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \ ;; \ x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \underline{x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ \underline{x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \end{array}\right\}$$

$$f'''(x)=2\left[-2x \cdot e^{1-x^2}\left(2x^2-1\right)+e^{1-x^2} \cdot 4x\right]=\underline{4xe^{1-x^2}\left(3-2x^2\right)= f'''(x)}$$

$$f'''\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}} \cdot 2 \neq 0 \Rightarrow P.\ I.\ \ para \ \ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \ ;; \ f\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{e} \Rightarrow \underline{\underline{P.\ I.\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{e}\right)}}$$

$$Por \ \ simetría \ \Rightarrow \ \underline{\underline{P.\ I.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{e}\right)}}.$$

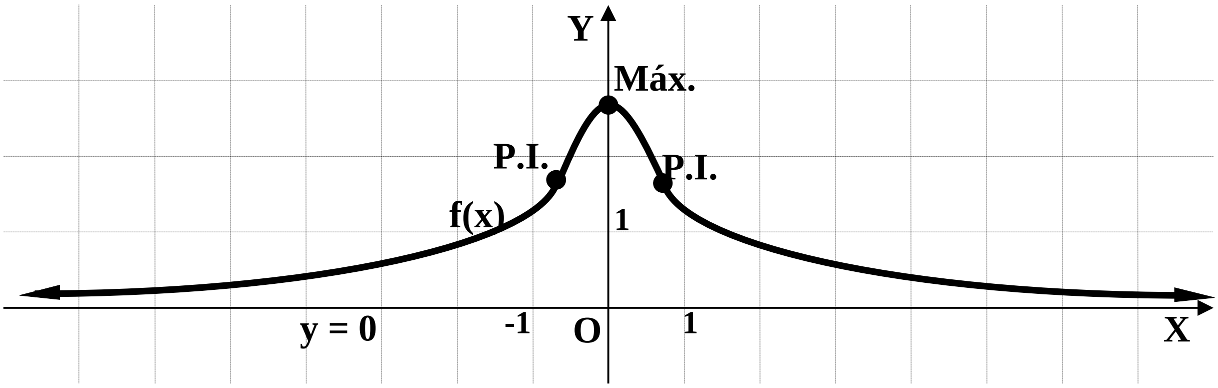
Las posibles asíntotas que puede tener la función son paralelas al eje de abscisas:

$$y=k=\lim_{x \to +\infty} f(x)=\lim_{x \to -\infty} f(x)=\lim_{x \to \infty} e^{1-x^2}=e^{-\infty}=\underline{0}$$

<u>El eje X es asíntota de la función.</u>

b)

La gráfica de $f(x) = e^{1-x^2}$, teniendo en cuenta lo anterior es, aproximadamente, como indica la siguiente figura:



$$S = \int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx = \int_1^3 x \cdot e^{1-x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 - x^2 = t \\ -2x \cdot dx = dt \\ x \cdot dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \middle\| \begin{array}{c} x = 3 \rightarrow t = -8 \\ \\ x = 1 \rightarrow t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = -\frac{1}{2} \int_0^{-8} e^t \cdot dt = -\frac{1}{2} \left[e^t \right]_0^{-8} = -\frac{1}{2} \left(e^{-8} - e^0 \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^8} - 1 \right) = \frac{e^8 - 1}{2e^8} \cong \underline{\underline{\frac{1}{2} \, u^2 = S}}$$

****

<u>CUESTIONES</u>

1ª) Sea A una matriz 2x2 de columnas C_1, C_2 y determinante 4. Sea B otra matriz 2x2 de determinante 2. Si C es la matriz de columnas $C_1 + C_2$ y $3C_2$, calcular el determinante de la matriz $B \cdot C^{-1}$.

$$A = (C_1,\ C_2)\ ;;\ |A| = |C_1,\ C_2| = 4\ ;;\ |B| = 2$$

$$|C| = |C_1 + C_2,\ 3C_2| = |C_1,\ 3C_2| + |C_2,\ 3C_2| = 3 \cdot |C_1,\ C_2| + 0 = 3 \cdot |A| = 3 \cdot 4 = \underline{\underline{12}}$$

$|C_2,\ 3C_2| = 0$ por tener dos columnas proporcionales.

$$|B \cdot C^{-1}| = |B| \cdot |C^{-1}| = |B| \cdot \frac{1}{|C|} = 2 \cdot \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

****

2ª) Calcular la distancia del origen al plano π que pasa por A(1, 2, 0) y contiene a la recta $r \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.

El vector director de la recta r es $\overrightarrow{v} = (2,\ 3,\ 1)$, y un punto de r es P(-2, 1, 0).

El plano π puede determinarse por los vectores directores $\overrightarrow{v}$ y $\overrightarrow{AP}$ y contener al punto A.

$\overrightarrow{AP} = P - A = (-2,\ 1,\ 0) - (1,\ 2,\ 0) = (-3,\ -1,\ 0)$.

$$\pi\left(A;\ \overrightarrow{v},\ \overrightarrow{AP}\right) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0\ ;;\ -3(y-2) - 2z + 9z + (x-1) = 0\ ;;$$

$$-3y + 6 + 7z + x - 1 = 0\ ;;\ \underline{\pi \equiv x - 3y + 7z + 5 = 0}$$

Sabiendo que la distancia de un plano al origen es: $d(O,\ \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(O,\ \pi) = \frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 7^2}} = \frac{5}{\sqrt{1+9+49}} = \frac{5}{\sqrt{59}} = \underline{\underline{\frac{5\sqrt{59}}{59}\ u = d(O,\ \pi)}}$$

****

3ª) Calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot L\,x}{e^x}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x \cdot L\,x}{e^x} = \frac{\infty \cdot \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \mathit{In}\det. \Rightarrow (L'\,Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{1 \cdot L\,x + x \cdot \frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{L\,x + 1}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \mathit{In}\det. \Rightarrow (L'\,Hopital) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = \frac{1}{\infty \cdot \infty} = \frac{1}{\infty} = \underline{\underline{0}}$$

****

4ª) Aplicando el Teorema de Lagrange de los incrementos finitos, demostrar que para $x>0$ se verifica: $arc\ \ tag\ (2x) - arc\ \ tag\ x < \frac{x}{1+x^2}$.

El Teorema del valor medio o de Lagrange, dice:

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un punto $c \in (a,\ b)$ que cumple: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$.

Considerando la función $f(x) = arc\ \ tag\ (2x) - arc\ \ tag\ x - \frac{x}{1+x^2}$.

f(x) cumple las hipótesis del Teorema de Lagrange por tratarse de una función que es la suma algebraica de tres funciones continuas en [0, n] y derivables en (0, n), $\forall n \in R,\ n > 0$.

$$f'(x) = \frac{2}{1+(2x)^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1}{1+x^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{1+x^2+1-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+4x^2} - \frac{2}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(1+x^2)^2 - 2(1+4x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \frac{2(1+2x^2+x^4)^2 - 2(1+4x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \frac{2(1+2x^2+x^4-1-4x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{2(x^4-2x^2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2} = \underline{\frac{2x^2(x^2-2)}{(1+4x^2)(1+x^2)^2}} = f'(x)$$

****

PROBLEMAS

PROBLEMAS

1º) a) Determinar el punto A', simétrico de A(-3, 1, -7) respecto de la recta r de ecuación: $r \equiv x+1=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{2}$.

b) Hallar la distancia de A a r.

----

a)

El plano π, perpendicular a r por A, es el que tiene como vector normal a un vector director de r, por ejemplo, $\overrightarrow{v}=(1,\ 2,\ 2)$, y contiene al punto A:

$$\left.\begin{array}{l}\pi \equiv x+2y+2z+D=0 \\ A(-3,\ 1,\ -7)\end{array}\right\} \Rightarrow -3+2\cdot 1-2\cdot 7+D=0\ ;;\ -3+2-14+D=0\ ;;\ \underline{D=15}$$

$$\underline{\pi \equiv x+2y+2z+15=0}$$

El punto N de intersección de la recta r con el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\pi' \equiv x+2y+2z+15=0 \\ r \equiv \begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=3+2\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (-1+\lambda)+2(3+2\lambda)+2(-1+2\lambda)+15=0\ ;;$$

$$-1+\lambda+6+4\lambda-2+4\lambda+15=0\ ;;\ 9\lambda=-18\ ;;\ \underline{\lambda=-2} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-3 \\ y=-1 \\ z=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad N(-3,\ -1,\ -5)$$

Para que A' sea el punto simétrico de A con respecto a r, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{NA'} \Rightarrow N-A=A'-N\ ;;\ (-3,\ -1,\ -5)-(-3,\ 1,\ -7)=(x,\ y,\ z)-(-3,\ -1,\ -5)\ ;;$$

$$(0,\ -2,\ 2)=(x+3,\ y+1,\ z+5) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3=0 \rightarrow \underline{x=-3} \\ y+1=-2 \rightarrow \underline{y=-3} \\ z+5=2 \quad \rightarrow \underline{z=-3} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\underline{A'(-3,\ -3,\ -3)}}$$

b)

La distancia de un punto A a una recta r es: $d(A,\ r)=\frac{\left|\overrightarrow{QA}\wedge\overrightarrow{v}\right|}{\left|\overrightarrow{v}\right|}$, donde Q es un punto cualquiera de la recta r.

Un punto de la recta r puede ser Q(-1, 3, -1), con lo cual:

$$\overrightarrow{QA} = A - Q = (-3,\ 1,\ -7) - (-1,\ 3,\ -1) = (-2,\ -2,\ -6).$$

$$d(A,\ r) = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{\left| -4i - 6j - 4k + 2k + 12i + 4j \right|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{\left| 8i - 2j - 2k \right|}{\sqrt{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{8^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{3} = \frac{\sqrt{64+4+4}}{3} = \frac{2\sqrt{16+1+1}}{3} = \frac{2\sqrt{18}}{3} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{2}}{3} = \underline{\underline{2\sqrt{2}\ u = d(A,\ r)}}$$

Nota: Este apartado podía hacerse de forma más sencilla: teniendo en cuanta que la distancia es la misma que entre los puntos A y N.

****

2º) Sea $f(x) = e^x + Lx, \quad x \in (0, \ \infty)$.

a) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f y sus asíntotas.

b) Probar que f tiene un punto de inflexión en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, \ 1\right]$ y esbozar la gráfica de f.

----

a)

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$. Por ser x > 0, no existe ningún valor real de x para el cual se anule la derivada, por lo tanto:

$$f'(x) > 0, \ \forall x > 0 \ \Rightarrow \ \underline{\underline{f(x) \ es \ \ monótona \ \ creciente}}$$

La función no tiene asíntotas verticales ni oblicuas por no ser racional y tampoco tiene asíntotas horizontales por ser $x \to \infty, \ \ f(x) \to \infty$.

b)

$$f''(x) = e^x - \frac{1}{x^2} \ \ ;; \ \ f''(x) = 0 \Rightarrow e^x = \frac{1}{x^2}$$

<u>CUESTIONES</u>

1ª) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&2\end{pmatrix}$, hallar las matrices X que satisfacen $X\cdot C+A=C+A^2$.

$X\cdot C+A=C+A^2$;; $X\cdot C=C+A^2-A$;; $X\cdot C=C+A(A-I)$;;

$X\cdot C\cdot C^{-1}=[C+A(A-I)]\cdot C^{-1}$;; $X\cdot I=[C+A(A-I)]\cdot C^{-1}$;;

$X=[C+A(A-I)]\cdot C^{-1}$ (*)

$$A-I=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(A-I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (*), resulta:

$$X=[C+A(A-I)]\cdot C^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right]\cdot C^{-1}=C\cdot C^{-1}=\underline{\underline{I=X}}$$

Teniendo en cuenta que $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=A$, la expresión dada puede ponerse de la forma:

$X\cdot C+A=C+A^2$;; $X\cdot C=C\Rightarrow \underline{\underline{X=I}}$

****

2ª) Dados el punto A(3, 5, -1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = \frac{z+1}{4}$, hallar el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $\pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$

La expresión por unas ecuaciones paramétricas de r es: $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$, por lo cual su punto general es: $B(1+2\lambda,\ -2+\lambda,\ -1+4\lambda)$.

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene las siguientes componentes: $\overrightarrow{AB} = (2-2\lambda,\ 7-\lambda,\ -4\lambda)$.

Para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea paralelo al plano π tiene que ser perpendicular al vector normal al plano, que es $\overrightarrow{n} = (3,\ -2,\ 1)$.

Teniendo en cuenta que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero, tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \Rightarrow (2-2\lambda,\ 7-\lambda,\ -4\lambda) \cdot (3,\ -2,\ 1) = 0 \ ;;$$

$$6 - 6\lambda - 14 + 2\lambda - 4\lambda = 0 \ ;; \ -8 - 8\lambda = 0 \ ;; \ \underline{\lambda = -1}$$

El punto B resulta ser: $\underline{\underline{B(-1,\ -3,\ -5)}}$.

****

3ª) Estudiar, según los valores de los números reales α y β, la continuidad de la función f definida por $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+\alpha}{1+x^{\frac{1}{x}}} & si \quad x \neq 0 \\ \beta & si \quad x = 0 \end{cases}$

La función está definida para cualquier valor real de x, excepto para x = 0, por lo tanto, para determinar su continuidad basta con estudiarla para este valor.

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+\alpha}{1+x^{\frac{1}{x}}} = \frac{\alpha}{1+0^{\infty}} \Rightarrow \underline{Indeterminado}$$

Para determinar la indeterminación hacemos lo siguiente:

$$1+x^{\frac{1}{x}} = y \;\;;;\;\; y-1 = x^{\frac{1}{x}} \;\;;;\;\; L(y-1) = \frac{1}{x} L\,x = \frac{L\,x}{x} \Rightarrow (Tomando \;\; límites \;\; para \;\; x \to 0) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} L\,y = \lim_{x \to 0} \frac{L\,x}{x} = \frac{-\infty}{0} \Rightarrow Indet. \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$$

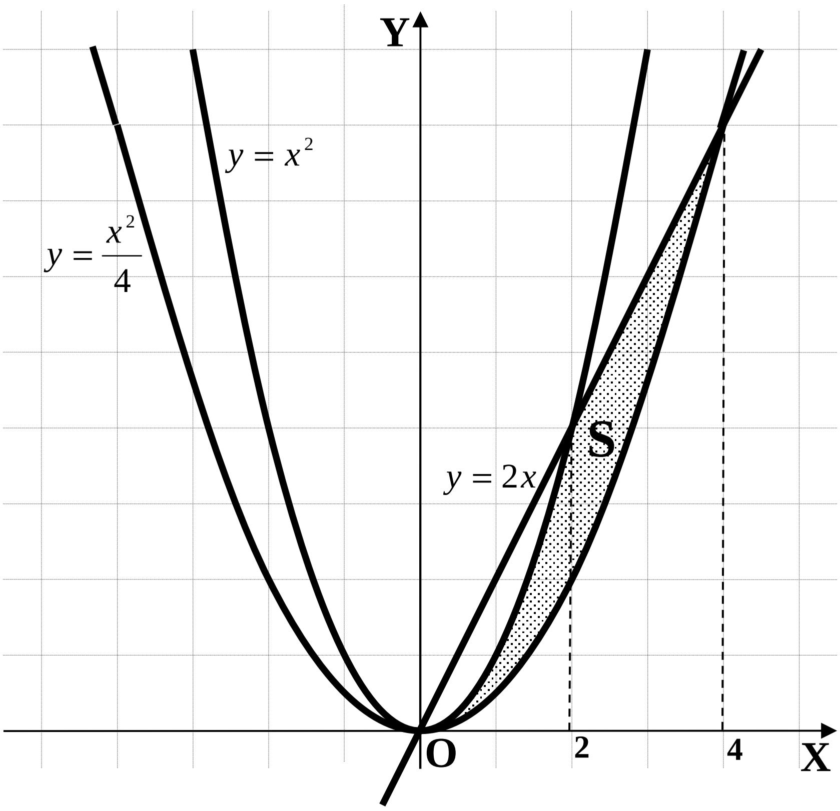
4ª) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de las siguientes funciones: $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$.

Los puntos de corte de la recta con cada una de las parábolas son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = 2x \;\;;;\;\; x^2 - 2x = 0 \;\;;;\;\; x(x-2) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ x_2 = 2 \rightarrow \underline{A(2,\ 4)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 2x \;\;;;\;\; x^2 - 4x = 0 \;\;;;\;\; x(x-4) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow \underline{O(0,\ 0)} \\ \\ x_3 = 4 \rightarrow \underline{B(4,\ 8)} \end{cases}$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación es la siguiente:



$$S = \int_0^2 \left(x^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx + \int_2^4 \left(2x - \frac{x^2}{4} \right) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{12} \right]_0^2 + \left[x^2 - \frac{x^3}{12} \right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - \frac{8}{12} \right) - 0 + \left[\left(16 - \frac{64}{12} \right) - \left(4 - \frac{8}{12} \right) \right] = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} + 16 - \frac{16}{3} - 4 + \frac{2}{3} = 12 - \frac{8}{3} = \underline{\underline{\frac{28}{3}\ u^2 = S}}$$

****