

PRUEBA DE ACCESO (LOGSE)**UNIVERSIDAD DE CASTILLA Y LEÓN****SEPTIEMBRE - 2007**

(Resueltos por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS II**Tiempo máximo: 1 hora y 30 minutos**

Criterios generales de evaluación de la prueba: Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones.

Datos o tablas (si ha lugar): Podrá utilizarse una calculadora "de una línea". No se admitirá el uso de memoria para texto, ni de las prestaciones gráficas.

Optatividad: Se proponen dos pruebas, A y B. Cada una de ellas consta de dos problemas y cuatro cuestiones. Cada problema tendrá una puntuación máxima de tres puntos, y cada cuestión se puntuará, como máximo, con un punto. El alumno deberá escoger una de las pruebas, A o B, y desarrollar las preguntas de la misma en el orden deseado.

PRUEBA A**PROBLEMAS**

1º) Se considera el sistema
$$\begin{cases} x + y + az = 4 \\ ax + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases}$$
, donde a es un parámetro real.

a) Discutir el sistema en función del valor del parámetro a .

b) Resolver el sistema para $a = 1$.

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 4 \\ a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

El rango de M en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ a & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 2a^2 - 2 - 2a + 2 + a = 2a^2 - a - 1 = 0 \ ; \ ;$$

$$a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \underline{a_1 = 1} \ ; \ ; \ \underline{a_2 = -\frac{1}{2}}$$

Para $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Rightarrow \text{Compatible det er min ado}$

Para $a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 8 - 2 = 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 2}$$

Para $a = 1 \Rightarrow \text{Rango } M = \text{Rango } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{Compatible In det er min ado}$

Para $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rango } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 - 8 + 1 = -7 \neq 0 \Rightarrow \underline{\text{Rango } M' = 3}$$

Para $a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{Rango } M \neq \text{Rango } M' \Rightarrow \text{Incompatible}$

b)

Resolvemos para $a = 1$. El sistema resulta:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - z = 2 \end{cases} .$$

Despreciando una de las ecuaciones (la tercera) y parametrizando una de las incógnitas (y), se tiene:

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y = \lambda} \ ; \ ; \ ; \ \underline{z = 2} \ ; \ ; \ ; \ x + y - z = 0 \ ; \ ; \ ; \ x + \lambda - 2 = 0 \ ; \ ; \ ; \ \underline{x = 2 - \lambda}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 \end{cases}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

www.yoquieroaprobar.es

2º) Sea f la función dada por $f(x) = e^{2x-x^2}$. Se pide:

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y las asíntotas de f .

b) Determinar el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

a)

Se trata de una función exponencial cuyo dominio es \mathbb{R} y su recorrido es $(0, \infty)$, por lo tanto tiene como asíntota horizontal la recta $y = 0$, como más adelante se justificará.

$$f'(x) = (2 - 2x) \cdot e^{2x-x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow (2 - 2x) \cdot e^{2x-x^2} = 0 \ ; \ ; \ ; \ 2 - 2x = 0 \ ; \ ; \ ; \ \underline{x = 1}$$

$$\text{Para } x > 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Decrecimiento}}} \Rightarrow (1, \infty)$$

$$\text{Para } x < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Crecimiento}}} \Rightarrow (-\infty, 1)$$

De lo anterior se deduce que para $x = 1$ la función tiene un máximo, en esta caso absoluto, que justificamos a continuación a través de la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2 \cdot e^{2x-x^2} + (2 - 2x) \cdot (2 - 2x)e^{2x-x^2} = -2 \cdot e^{2x-x^2} + 4(1-x)^2 \cdot e^{2x-x^2} = \\ &= 2e^{2x-x^2} [-1 + 2(1-x)^2] = 2e^{2x-x^2} (-1 + 2 - 4x + 2x^2) = \underline{\underline{(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2} = f''(x)}} \end{aligned}$$

$$f''(1) = (2 - 4 + 1)e^1 = -e < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo para } x = 1}}$$

$$f(1) = e^{2-1} = e \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo}}} \Rightarrow \underline{\underline{P(1, e)}}.$$

Por las características de la función, carece de asíntotas verticales y oblicuas.

Para determinar la posible asíntota oblicua recurrimos a los límites con tendencia a $+\infty$ y a $-\infty$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)} = e^{-\infty} = \underline{0} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2\left(\frac{2}{x}-1\right)} = e^{-\infty} = \underline{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{\underline{\text{Asíntota horizontal : } y = 0}}$$

b)

La ecuación $f(x) = e^{2x-x^2} = 2$ es equivalente a $2x - x^2 = L2$;; $x^2 - 2x + L2 = 0$.

El número de soluciones depende del signo del discriminante de la ecuación anterior:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4L2}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1 - L2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - L2}.$$

Teniendo en cuenta que $L2 \cong 0'69$, las soluciones son:

$$x_1 = 1 + \sqrt{1 - 0'69} = 1 + \sqrt{31} > 1 \Rightarrow x_1 \notin [0, 1]$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{1 - 0'69} = 1 - \sqrt{31} ;; 0 < x_2 < 1 \Rightarrow x_2 \in [0, 1]$$

La ecuación $f(x) = 2$ tiene una solución el intervalo $[0, 1]$.

CUESTIONES

1ª) Sea X una matriz 2×2 , I la matriz identidad 2×2 y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hallar X sabiendo que $BX + B = B^2 + I$.

$$BX + B = B^2 + I \quad ; ; \quad B \cdot (X + I) = B^2 + I \Rightarrow (\text{Multiplicando por la izquierda por } B^{-1}) \Rightarrow$$

$$B^{-1} \cdot B \cdot (X + I) = B^{-1} \cdot (B^2 + I) \quad ; ; \quad I \cdot (X + I) = B^{-1} \cdot B \cdot B + B^{-1} \cdot I \quad ; ;$$

$$X + I = I \cdot B + B^{-1} \quad ; ; \quad X + I = B + B^{-1} \quad ; ; \quad \underline{X = B + B^{-1} - I} \quad (*)$$

La matriz inversa de $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la siguiente:

$$(B/I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow \frac{1}{2} F_1 \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ F_1 \rightarrow F_1 - \frac{1}{2} F_2 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Sustituyendo los valores de B y B^{-1} en la expresión (*):

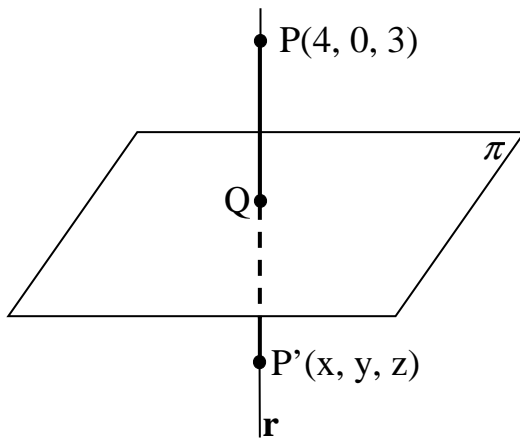
$$X = B + B^{-1} - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\underline{X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

2ª) Determinar el punto simétrico de P(4, 0, 3) respecto del plano de ecuación $\pi \equiv x = y$.

La expresión general del plano es $\pi \equiv x - y = 0$ y un vector normal al plano π es

$$\vec{n} = (1, -1, 0).$$



La recta r es la que pasa por el punto P y es perpendicular al plano tiene como vector director al vector normal del plano, y sus ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x = 4 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 3 \end{cases}.$$

Un punto genérico de la recta r es $Q'(4 + \lambda, -\lambda, 3)$.

El punto Q, intersección del plano π con la recta r, tiene que satisfacer las ecuaciones de ambos, por lo tanto:

$$\left. \begin{array}{l} \pi \equiv x - y = 0 \\ Q(4 + \lambda, -\lambda, 3) \end{array} \right\} \Rightarrow (4 + \lambda) - (-\lambda) = 0 \ ; \ ; \ ; \ 4 + \lambda + \lambda = 0 \ ; \ ; \ ; \ 2\lambda = -4 \ ; \ ; \ ; \ \lambda = -2 \Rightarrow \underline{Q(2, 2, 3)}$$

Para que P' sea el punto simétrico de P con respecto a π , tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'} \Rightarrow Q - P = P' - Q \ ; \ ; \ ; \ (2, 2, 3) - (4, 0, 3) = (x, y, z) - (2, 2, 3) \ ; \ ; \ ;$$

$$(-2, 2, 0) = (x - 2, y - 2, z - 3) \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -2 \rightarrow \underline{x = 0} \\ y - 2 = 2 \rightarrow \underline{y = 4} \\ z - 3 = 0 \rightarrow \underline{z = 3} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{P'(0, 4, 3)}}$$

3ª) Determinar en qué puntos de la gráfica de la función $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$, la recta tangente a la misma es paralela a la recta $y = x + 7$.

La recta $y = x + 7$ tiene de pendiente 1.

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto es igual al valor de la derivada de la función en ese punto, por lo cual, la derivada de $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ tiene que ser 1:

$$y' = 3x^2 - 6x + 1 = 1 \quad ;; \quad 3x^2 - 6x = 0 \quad ;; \quad 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow \underline{x_1 = 0} \quad ;; \quad \underline{x_2 = 2}$$

$$y(0) = 1 \Rightarrow P(0, 1)$$

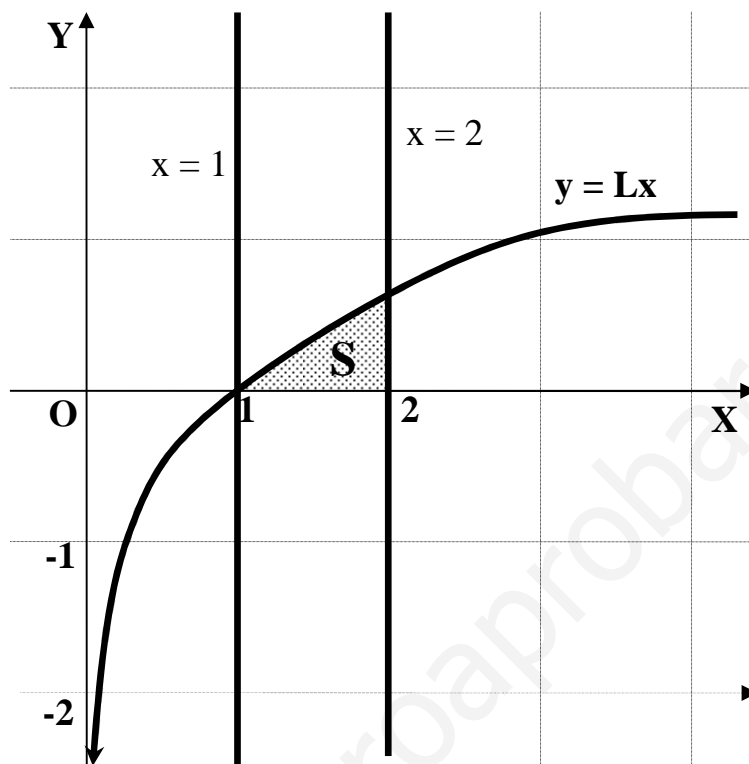
$$y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 8 - 12 + 3 = -1 \Rightarrow Q(2, -1)$$

Los puntos pedidos son P(0, 1) y Q(2, -1).

www.yoquieroaprobar.es

4ª) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = Lx$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

La situación gráfica se ilustra en la siguiente figura:



Teniendo en cuenta que toda la superficie pedida está en la parte positiva, su valor es el siguiente: $S = \int_1^2 Lx \cdot dx$.

El valor de la integral indefinida $I = \int Lx \cdot dx$ tiene que determinarse por el método de “por partes”, tal como se indica a continuación:

$$I = \int Lx \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lx = u \rightarrow du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ dx = dv \rightarrow v = x \end{array} \right\} \Rightarrow I = Lx \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot Lx - \int dx =$$

$$= x \cdot Lx - x + C = \underline{\underline{x(Lx-1) + C = I}}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie pedida es:

$$S = \int_1^2 Lx \cdot dx = [x(Lx-1)]_1^2 = [2(L2-1)] - [1(L1-1)] = 2(L2-1) - (0-1) = 2L2 - 2 + 1 =$$

$$= \underline{\underline{(L4-1)u^2 = S}}$$

PRUEBA B

PROBLEMAS

1º) De la recta r se sabe que está contenida en el plano $\pi \equiv x - y = 0$, que $O(0, 0, 0)$ pertenece a r , y que el vector que une O y $B(1, 0, -1)$ es perpendicular a r . Determinar la recta r , y calcular la distancia entre r y el plano π' paralelo a π que pasa por B .

El vector normal del plano $\pi \equiv x - y = 0$ es $\vec{n} = (1, -1, 0)$ y teniendo en cuenta que si una recta es perpendicular a un plano es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano, el vector $\vec{n} = (1, -1, 0)$ es perpendicular a r .

Sabemos que el vector $\vec{v} = \overrightarrow{OB} = (1, 0, -1)$ es perpendicular a r por condición del problema, por lo tanto, la recta r es perpendicular al mismo tiempo a los vectores \vec{n} y \vec{v} , lo cual significa que el vector director de la recta es el producto vectorial $\vec{n} \wedge \vec{v}$:

$$\vec{v}_r = \vec{n} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + k + j = i + j + k = \underline{\underline{(1, 1, 1)}} = \vec{v}_r$$

Teniendo en cuenta que r contiene a $O(0, 0, 0)$, su ecuación dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente: $r \equiv \{x = y = z\}$.

El plano π' , por ser paralelo a π , tiene una ecuación general de la forma siguiente: $\pi' \equiv x - y + D = 0$. Para determinar el valor de D tenemos en cuenta que el punto B pertenece al plano π' :

$$\left. \begin{array}{l} \pi' \equiv x - y + D = 0 \\ B(1, 0, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow 1 - 0 + D = 0 \quad ; \quad D = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\pi' \equiv x - y - 1 = 0}}$$

Naturalmente que la recta r y el plano π' son paralelos, por lo cual su distancia es la misma que la de cualquier punto de r al plano π' , por ejemplo el punto $O(0, 0, 0)$.

Sabiendo que la distancia del origen de coordenadas al plano genérico $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ es $d(O, \pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$:

$$d(r, \pi') = d(O, \pi') = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ unidades} = d(r, \pi')}}}$$

2º) Sea la función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Se pide hallar:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , los máximos y mínimos relativos y las asíntotas. Esbozar su gráfica.

b) El área de la región limitada por la gráfica de f , el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

a)

Se trata de una función racional cuyo dominio es \mathbb{R} , por no existir valores reales de x que anulan el denominador.

Es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x) = -f(x)$.

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento recurrimos a su derivada:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = f'(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \quad ; \quad (1+x)(1-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } |x| > 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Decrecimiento: } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}}$$

$$\text{Para } |x| < 1 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Crecimiento: } (-1, 1)}}$$

Los máximos y mínimos relativos de la función son los siguientes:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x \cdot (x^2 + 1)^2 - (1 - x^2) \cdot 2 \cdot (x^2 + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2 + 1) - 4x \cdot (1 - x^2)}{(x^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(x^2 + 1)^3} = \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = f''(x) \end{aligned}$$

$$f''(1) = \frac{2 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} = \frac{-4}{8} < 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Máximo}}} \Rightarrow f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(1, \frac{1}{2}\right)}}$$

$$f''(-1) = \frac{-2 \cdot (1-3)}{(1+1)^3} = \frac{4}{8} > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\text{Mínimo}}} \Rightarrow f(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{Q\left(-1, -\frac{1}{2}\right)}}$$

Los puntos de inflexión son los siguientes:

$$f'''(x) = 0 \Rightarrow \frac{2x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3} = 0 \Rightarrow 2x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \sqrt{3} \\ x_3 = -\sqrt{3} \end{cases}$$

$$f''''(x) = \frac{(6x^2 - 6)(x^2 + 1)^3 - (2x^3 - 6x) \cdot 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x}{(x^2 + 1)^6} = \frac{(6x^2 - 6)(x^2 + 1) - 6x(2x^3 - 6x)}{(x^2 + 1)^4} =$$

$$= \frac{6x^4 + 6x^2 - 6x^2 - 6 - 12x^4 + 36x^2}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-6x^4 + 36x^2 - 6}{(x^2 + 1)^4} = \frac{-6(x^4 - 6x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^4} = f''''(x)$$

$$f''''(0) = \frac{-6}{2} \neq 0 \Rightarrow P. \text{ Inflexión} \ ; \ ; \ f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{O(0, 0)}}$$

$$f''''(\sqrt{3}) = \frac{-6(9 - 18 + 1)}{16} \neq 0 \Rightarrow P. \text{ Inflexión} \ ; \ ; \ f(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \underline{\underline{M\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

$$f''''(-\sqrt{3}) = \frac{-6(9 - 18 + 1)}{16} \neq 0 \Rightarrow P. \text{ Inflexión} \ ; \ ; \ f(-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \underline{\underline{N\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}}$$

Las asíntotas son las siguientes:

Horizontales:

Son los valores finitos de f(x) cuando x tiende a $\pm \infty$:

$$y = k \Rightarrow y = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 1} = 0 = y \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \underline{\underline{0^+}} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underline{\underline{0^-}} \end{cases}$$

La solución de este apartado es lógica si tenemos en cuenta que la función es simétrica con respecto al origen de coordenadas.

Verticales:

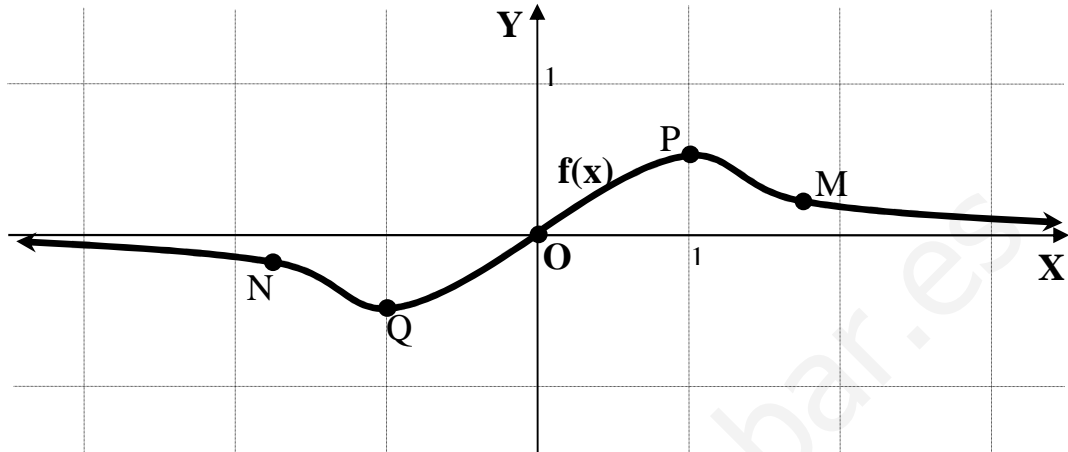
Son los valores finitos que anulan el denominador: no tiene.

Oblicuas:

Para que una función racional tenga asíntotas oblicuas es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el grado del denominador.

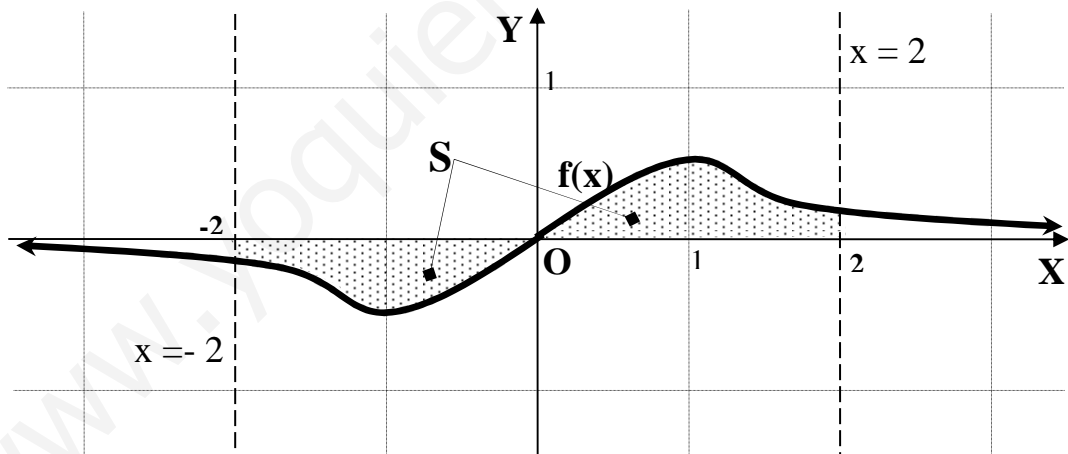
En el caso que nos ocupa: no tiene.

La representación gráfica de la función es, aproximadamente, la siguiente:



b)

Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la gráfica siguiente, se deduce que el área pedida es:



$$S = 2 \cdot \int_0^2 f(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^2 \frac{x}{x^2 + 1} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + 1 = t \\ x dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right\} \left\| \begin{array}{l} x = 2 \rightarrow t = 5 \\ x = 0 \rightarrow t = 1 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_1^5 \frac{dt}{t} = [Lt]_1^5 = L5 - L1 = \underline{\underline{L5 \cong 1'61 u^2 = S}}$$

CUESTIONES

1ª) Discutir, en función del número real m , el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Independientemente del valor de m , el Rango de A es igual o mayor que 2 por ser el menor complementario del elemento $a_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, cuyo rango es 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - m(1+m) - 6 + 4m + 6 - 2(1+m) = 8 - m - m^2 + 4m - 2 - 2m =$$

$$= -m^2 + m + 6 = 0 \quad ; ; \quad m^2 - m - 6 = 0.$$

$$m = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \Rightarrow \underline{m_1 = 3} \quad ; ; \quad \underline{m_2 = -2}$$

$$\underline{\underline{\text{Para } \begin{cases} m \neq 3 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 3. \quad \text{Para } \begin{cases} m = 3 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{Rango } A = 2}}$$

2ª) Sea A el punto medio del segmento de extremos P(3, 2, 1) y Q(-1, 0, 1). Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B(2, 1, 3), C(1, 2, 3) y D(3, 4, 1).

El punto medio buscado es el que tiene la media de las respectivas coordenadas, o sea: A(1, 1, 1).

Los vectores que determinan el tetraedro son:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, 3) - (1, 1, 1) = \underline{(1, 0, 2)}.$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (1, 2, 3) - (1, 1, 1) = \underline{(0, 1, 2)}.$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (3, 4, 1) - (1, 1, 1) = \underline{(2, 3, 0)}.$$

Sabiendo que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan (en valor absoluto), será:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right| = \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{array} \right\| = \frac{1}{6} \cdot |-4 - 6| = \frac{10}{6} = \underline{\underline{\frac{5}{3} u^3 = V_{ABCD}}}$$

3ª) Discutir si la ecuación $x + \operatorname{sen} x = 2$ tiene alguna solución real.

Considerando la función $f(x) = x + \operatorname{sen} x - 2$ y teniendo en cuenta el Teorema de Bolzano que dice lo siguiente:

“Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y en los extremos de éste toma valores de distinto signo, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$ ”.

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es \mathbb{R} , por tanto le es aplicable el mencionado teorema en cualquier intervalo finito que se considere.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $(0, \pi)$ se observa que para el valor $x = 0$ es $f(0) < 0$ y para $x = \pi$ es $f(\pi) > 0$:

$$f(0) = 0 + \operatorname{sen} 0 - 2 = 0 + 0 - 2 = -2 < 0 \quad ; \quad f(\pi) = \pi + \operatorname{sen} \pi - 2 = \pi - 1 - 2 = \pi - 3 > 0$$

Lo anterior demuestra que la función dada tiene al menos una solución real.

4ª) Calcular, si existe, el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} \right)^2 = A^2.$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \frac{e^0 - e^{-0}}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Indet.} \Rightarrow (L'Hopital) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{1} =$$

$$= \frac{1+1}{1} = 2.$$

$$\underline{\underline{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x})^2}{x^2} = A^2 = 2^2 = 4}}$$

www.yoquieroaprobar.es